第1章 命题逻辑

定义 1.1 能够确切判断其结论是真或假的陈述句称为**命题**。

定义 1.2 用一个具体的命题代入命题标识符 P 的过程，称为对 P 的**解释或赋值**。

定义 1.3 凡是不能用联结词分解出更简单的子命题的命题称为**原子命题**，反之称为**复合命题**。与原子命题对应的命题标识符叫做**原子命题变元**。

$\neg P$ 否命题　$P \wedge Q$ 合取命题　$P \vee Q$ 析取命题　$P \overline{\vee} Q$ 不可兼或

$P \rightarrow Q$ 条件命题（只有假推真才不成立）　$P \overline{\wedge} Q$ 与非命题

$P \leftrightarrow Q$ 双条件命题（PQ同值才成立）　$P \downarrow Q$ 或非命题

命题合适公式、命题函数、真值表

永真式（重言式）、矛盾式、可满足公式

定义 1.12 设 A 和 B 是命题公式，如果对 A 和 B 的任何解释（即对原子变元的任何赋值）都导致 A 和 B 有相同的真值，则称 A 和 B 是**等价**的，记为 $A \Leftrightarrow B$。

E_1：$\sim(\sim P) \Leftrightarrow P$	（双重否定律）
E_2：$P \rightarrow Q \Leftrightarrow \sim P \vee Q$	（蕴涵律）
E_3：$P \vee P \Leftrightarrow P$ E_4：$P \wedge P \Leftrightarrow P$	（幂等律）
E_5：$P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$ E_6：$P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$	（交换律）
E_7：$P \vee (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \vee R$ E_8：$P \wedge (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \wedge R$	（结合律）
E_9：$P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$ E_{10}：$P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$	（分配律）
E_{11}：$P \wedge (P \vee Q) \Leftrightarrow P$ E_{12}：$P \vee (P \wedge Q) \Leftrightarrow P$	（吸收律）

注：只有 $A, B \Leftrightarrow A \leftrightarrow B$

E_{13}：$\sim(P \vee Q) \Leftrightarrow \sim P \wedge \sim Q$。 E_{14}：$\sim(P \wedge Q) \Leftrightarrow \sim P \vee \sim Q$	（De Morgan 律）
E_{15}：$P \vee F \Leftrightarrow P$ E_{16}：$P \wedge T \Leftrightarrow P$	（同一律）
E_{17}：$P \wedge F \Leftrightarrow F$ E_{18}：$P \vee T \Leftrightarrow T$	（零律）
E_{19}：$P \wedge \sim P \Leftrightarrow F$ E_{20}：$P \vee \sim P \Leftrightarrow T$	（矛盾律）
E_{21}：$P \nabla Q \Leftrightarrow (\sim P \wedge Q) \vee (P \wedge \sim Q)$	（排中律）
E_{22}：$P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$	（等价律）
E_{23}：$P \rightarrow Q \Leftrightarrow \sim Q \rightarrow \sim P$	（逆反律）

$A \rightarrow (B \rightarrow C) \Leftrightarrow B \rightarrow (A \rightarrow C)$ （连续推理交换）

定义 1.13 设 A 和 A^* 是两个包含 $\vee$，$\wedge$，$\sim$ 的命题公式。如果把 A 中的联结词 $\vee$ 换成 $\wedge$，把 $\wedge$ 换成 $\vee$，把 T 换成 F，把 F 换成 T 后得到的正是 A^*，则称 A^* 是 A 的**对偶公式**。

定理 1.4 设 P_1，…，P_n 是出现在一对对偶公式 A 和 A^* 中的全部原子变元，若 A 和 A^* 分别表示为 $A(P_1, \cdots, P_n)$ 和 $A^*(P_1, \cdots, P_n)$，那么

$$\sim A(P_1, \cdots, P_n) \Leftrightarrow A^*(\sim P_1, \sim P_2, \cdots, \sim P_n)$$

定理 1.5 设 A 和 B 是两个命题公式。如果 $A \Leftrightarrow B$，必有 $A^* \Leftrightarrow B^*$。

【证明】 设 $A(P_1, \cdots, P_n) \Leftrightarrow B(P_1, \cdots, P_n)$，于是

$$A(P_1, \cdots, P_n) \leftrightarrow B(P_1, \cdots, P_n)$$

常见功能完备集 $\{\sim, \vee, \wedge\}$

最小功能完备集 $\{\uparrow\}$，$\{\downarrow\}$，$\{\sim, \wedge\}$，$\{\sim, \vee\}$

定义 1.16 原子公式及其否定都称为**句节**（或分别称为正句节或负句节）。有限个句节组成的析取式称为**子句**。有限个子句组成的合取式称为**合取范式**。有限个句节组成的合取式称为**短语**。有限个短语组成的析取式称为**析取范式**。

极大项、极小项、主析取公式、主合取公式

表 1-18　p，q，r 形成的极小项与极大项

极小项			极大项		
公式	成真赋值	名称	公式	成假赋值	名称
$\sim p \wedge \sim q \wedge \sim r$	0 0 0	m_0	$p \vee q \vee r$	0 0 0	M_0
$\sim p \wedge \sim q \wedge r$	0 0 1	m_1	$p \vee q \vee \sim r$	0 0 1	M_1
$\sim p \wedge q \wedge \sim r$	0 1 0	m_2	$p \vee \sim q \vee r$	0 1 0	M_2
$\sim p \wedge q \wedge r$	0 1 1	m_3	$p \vee \sim q \vee \sim r$	0 1 1	M_3
$p \wedge \sim q \wedge \sim r$	1 0 0	m_4	$\sim p \vee q \vee r$	1 0 0	M_4
$p \wedge \sim q \wedge r$	1 0 1	m_5	$\sim p \vee q \vee \sim r$	1 0 1	M_5
$p \wedge q \wedge \sim r$	1 1 0	m_6	$\sim p \vee \sim q \vee r$	1 1 0	M_6
$p \wedge q \wedge r$	1 1 1	m_7	$\sim p \vee \sim q \vee \sim r$	1 1 1	M_7

真值表法：

根据问题确定公式的值的分布情况，通过求范式得到合适的等价公式

等价变换法：

析取范式

$$Q \equiv Q \wedge (\neg P \vee P)$$

合取范式

$$Q \equiv Q \vee (\neg P \wedge P)$$

蕴含：设 A 和 B 是两个命题公式，则 $A \Rightarrow B$ 当且仅当 $A \rightarrow B$ 是永真式。

$P \wedge Q \Rightarrow P$，$P \wedge Q \Rightarrow Q$ $\sim(P \rightarrow Q) \Rightarrow P$，$\sim(P \rightarrow Q) \Rightarrow \sim Q$ （增加析取 简化合取）	（简化法则）
$P \Rightarrow P \vee Q$，$Q \Rightarrow P \vee Q$ $\sim P \Rightarrow P \rightarrow Q$，$Q \Rightarrow P \rightarrow Q$	（扩充法则）
$P \wedge (P \rightarrow Q) \Rightarrow Q$	（假言推理）
$\sim Q \wedge (P \rightarrow Q) \Rightarrow \sim P$	（拒取式）
$\sim P \wedge (P \vee Q) \Rightarrow Q$ $P \wedge (\sim P \vee Q) \Rightarrow Q$	（析取三段论）
$(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R) \Rightarrow P \rightarrow R$	（假言三段论）
$(P \vee Q) \wedge (P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow R) \Rightarrow R$ $(P \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow S) \Rightarrow (P \wedge R) \rightarrow (Q \wedge S)$	（二难推论）
$(P \leftrightarrow Q) \wedge (Q \leftrightarrow R) \Rightarrow P \leftrightarrow R$	（等价三段论）
$(P \vee Q) \wedge (\sim P \vee R) \Rightarrow Q \vee R$	（归结原理）

蕴含的性质

性质 1 $A \Rightarrow A$。（自反性）

性质 2 如果 $A \Rightarrow B$ 且 $B \Rightarrow A$，则必有 $A \Leftrightarrow B$。（反对称性）

性质 3 如果 $A \Rightarrow B$ 且 A 是永真式，则 B 必是永真式。

性质 4 如果 $A \Rightarrow B$ 且 $B \Rightarrow C$，则必有 $A \Rightarrow C$。（传递性）

性质 5 如果 $A \Rightarrow B$ 且 $A \Rightarrow C$，则 $A \Rightarrow B \wedge C$。

性质 6 如果 $A \Rightarrow C$ 且 $B \Rightarrow C$，则 $A \vee B \Rightarrow C$。

性质 7 $A \wedge B \Rightarrow C$，当且仅当 $A \Rightarrow B \rightarrow C$。

性质 8 $A \Rightarrow B$，当且仅当 $A \wedge \sim B$ 是矛盾式。

推理：

定义 1.19 设 A_1，A_2，…，A_n 和 B 都是合适公式，如果 $A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n \Rightarrow B$，$B$ 是前提 A_1，A_2，…，A_n 的**有效结论**或**逻辑结果**，也可以说由 A_1，A_2，…，A_n 推论 B。

定义 1.20 设 G 是由一组命题公式组成的集合，如果存在命题公式的有限序列

$$A_1, A_2, \cdots, A_n (= B)$$

使得每个 A_i 要么是 G 中一个公式，要么是由其前提 A_1，A_2，…，A_{i-1} 推出的结论，则称 B 是 G 的**逻辑结果**，或者说由 G **演绎**出了 B。

推理规则

P 规则 前提引用规则。(前提)

T 规则 中间结果引用规则。利用等价式和蕴涵式，或由推理过程中已推导出的公式导出新公式。如果推导中依据的是等价变换式，规则应标明为 TE，若依据的是蕴涵变换式，规则应标明为 TI。(等价变换、蕴含变换)

CP 规则 如果要推导的结果是形如 $B \to C$ 的公式，则把 B 作为附加前提，与给定的前提一起推导出 C。(附加前提 $A_1, A_2 \Rightarrow B \to C$ 转 $A_1, A_2, B \Rightarrow C$)

推理方法

- 直接法
- 间接法
  - 反证法 —— 消解法(J·A·Robinson)
  - CP规则

(P→Q)条件表达式

常用技巧

假言推理、德摩根定律、扩充/简化法则

$A \wedge B \Rightarrow A$

$A \Rightarrow A \vee B$

消解法

① 否定结论，与条件共同构成合取范式的子句集

② 使用消解原理，至到导出矛盾式(空子句□)

消解原理如 $\begin{cases} P \\ \neg P \vee Q \vee R \end{cases} \Rightarrow Q \vee R$

$\begin{cases} \neg P \vee Q \vee \neg R \vee S \\ \neg P \vee \neg Q \vee R \vee S \end{cases} \Rightarrow \neg P \vee S$

Ch1 习题集

1. 利用逻辑联结词把下列命题翻译成符号逻辑形式：

（3）尽管银行利率降低，股价却没有上升。

股价上升：p　利率降低：q

$q \wedge \neg p$（不能 $q \to \neg p$）无此因果关系

（5）他今天不是乘火车去了北京，就是随旅行团去了九寨沟。

乘车去北京：p　去九寨沟：q

$p \nabla q$（不能 $p \vee q$）

2. 判别下面各语句是否是命题，如果是命题，说出它的真值。

（2）这件事大概是小王干的。

（3）$x^2 = 64$。

不是命题

（8）凡事都有例外。

悖论

5. 证明下列各等价式：

（1）$\sim((\sim P \wedge Q) \vee (\sim P \wedge \sim Q)) \vee (P \wedge Q) \Leftrightarrow P$

注意吸收律 $P \vee (P \wedge Q) \equiv P$

注意 $P \vee P \equiv P$，$P \nabla P \not\equiv T$

14. 从 A，B，C，D 4 个人中派 2 个人出差，要求满足下述条件：如果 A 去，则必须在 C 或 D 中选一人同去；B 和 C 不能同时去；C 和 D 不能同时去。用构造范式的方法决定选派方案。

$C \nabla D$

构造主析取范式（最小项之和）

↳ 条件太复杂时，用真值表法构造

15. 证明下列蕴涵式：

（3）$P \wedge \sim P \wedge R \Rightarrow S$

（4）$P \Rightarrow Q \vee R \vee \sim R$

永假式 $F \Rightarrow$ 任何公式

任何公式 $\Rightarrow$ 永真式 T

20. 演绎证明下面各蕴涵式：

（3）$P \to (Q \to R)$，$(R \wedge S) \to E$，$\sim B \to (S \wedge \sim E) \Rightarrow P \to (Q \to B)$

结论 $P \to (Q \to B) \equiv (P \wedge Q) \to B$

再利用 CP 规则将 $P \wedge Q$ 作为前提

（5）$P \to (Q \to R)$，$Q \to (R \to S) \Rightarrow P \to (Q \to S)$

利用 $\begin{matrix} A \to B \\ B \to C \end{matrix} \Rightarrow A \to C$

以及 $A \to (B \to C) \equiv B \to (A \to C)$

第2章 一阶谓词逻辑

定义 2.1 设 D 是由客体构成的称为**个体域**的非空集合，以 D 中元素为值的变元称为**客体变元**。由形如

谓词标识符（客体变元 1，客体变元 2，…，客体变元 n）

构成的，其值为“真”或“假”的表达式，称为 n **元谓词**。

认为是包含一切客体的论域（称为**全论域**）。 时可用其他谓词来指明客体变元的性质，如 $REAL(x)$，$MAN(x)$ 等，这样的谓词称为**特性谓词**。

如：$\neg(\forall x)[N(x)\rightarrow P(x)]$

特性谓词

定义 2.4 在表达式 $(\forall x)A(x)$ 或 $(\exists x)A(x)$ 中，变元 x 称为**指导变元**，$A(x)$ 称为相应**量词的辖域**。

定义 2.5 在谓词公式 $(\forall x)A(x)$ 或 $(\exists x)A(x)$ 的辖域 $A(x)$ 中，凡与指导变元 x 相同的变元称为**约束变元**。谓词公式中凡不是约束变元的其他变元都称为**自由变元**。

等价形式：在论域 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 中，

$$(\forall x)A(x)\Leftrightarrow A(x_1)\wedge A(x_2)\wedge\cdots\wedge A(x_n)$$

$$(\exists x)A(x)\Leftrightarrow A(x_1)\vee A(x_2)\vee\cdots\vee A(x_n)$$

谓词表达式中，通常

$\forall$ 与 $\rightarrow$

$\exists$ 与 $\wedge$

定义 2.12 设 A 和 B 是以 D 为论域的谓词公式。如果在任一解释下，A 和 B 都取相同的真值，则称 A 和 B 在论域 D 上是**等价**的，记为 $A\Leftrightarrow B$。

定理 2.1 设 A 和 B 是论域 D 上的合适公式，则 $A\Leftrightarrow B$，当且仅当 $A\leftrightarrow B$ 是 D 上的永真公式。

基本等价式：

否定深入

定理 2.2 对含有量词的公式的否定，满足

① $\sim(\forall x)P(x)\Leftrightarrow(\exists x)[\sim P(x)]$

② $\sim(\exists x)P(x)\Leftrightarrow(\forall x)[\sim P(x)]$

量词辖域的收缩与扩张

定理 2.3 （量词辖域的收缩与扩张）设 Q 是不含指导变元的谓词公式，则

① $(\forall x)[P(x) \vee Q] \Leftrightarrow (\forall x)P(x) \vee Q$

② $(\forall x)[P(x) \wedge Q] \Leftrightarrow (\forall x)P(x) \wedge Q$

③ $(\exists x)[P(x) \vee Q] \Leftrightarrow (\exists x)P(x) \vee Q$

④ $(\exists x)[P(x) \wedge Q] \Leftrightarrow (\exists x)P(x) \wedge Q$

⑤ $Q \rightarrow (\forall x)P(x) \Leftrightarrow (\forall x)[Q \rightarrow P(x)]$

⑥ $Q \rightarrow (\exists x)P(x) \Leftrightarrow (\exists x)[Q \rightarrow P(x)]$

⑦ $(\forall x)P(x) \rightarrow Q \Leftrightarrow (\exists x)[P(x) \rightarrow Q]$

⑧ $(\exists x)P(x) \rightarrow Q \Leftrightarrow (\forall x)[P(x) \rightarrow Q]$

⑨ $(\forall x)P(x) \wedge (\forall x)Q(x) \Leftrightarrow (\forall x)[P(x) \wedge Q(x)]$

⑩ $(\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x) \Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)[P(x) \vee Q(y)]$

⑪ $(\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x) \Leftrightarrow (\exists x)(\exists y)[P(x) \wedge Q(y)]$

⑫ $(\exists x)P(x) \vee (\exists x)Q(x) \Leftrightarrow (\exists x)[P(x) \vee Q(x)]$

⑬ $(\exists x)[P(x) \rightarrow Q(x)] \Leftrightarrow (\forall x)P(x) \rightarrow (\exists x)Q(x)$

$\forall x$ 与 $\wedge \Leftrightarrow \forall x$

$\exists x$ 与 $\vee \Leftrightarrow \exists x$

否则 $\forall x \forall y$

$\exists x \exists y$

前束范式

定义 2.13 如果谓词公式

$$A = (Q_1 x_1)(Q_2 x_2)\cdots(Q_n x_n)G$$

其中 $Q_i x_i$ 或是 $\forall x_i$ 或是 $\exists x_i (1 \leqslant i \leqslant n)$，而 G 是不含有量词的公式，则称 A 是**前束范式**，称 G 是 A 的**母式**。

Skolem 范式

$\exists x_1 \forall x_2 \forall x_3 \exists x_4$

将 x_1 换为常数 a

将 x_4 换为函数 $f(x_2, x_3)$

蕴含

定理 2.8 $A \Rightarrow B$，当且仅当 $A \rightarrow B$ 是永真式。

定理 2.10 设 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 是以 D 为论域的谓词公式，则下述蕴涵式成立：

⑤ $(\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x) \Rightarrow (\forall x)[P(x) \vee Q(x)]$

⑥ $(\exists x)[P(x) \wedge Q(x)] \Rightarrow (\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x)$

⑦ $(\forall x)[P(x) \rightarrow Q(x)] \Rightarrow (\forall x)P(x) \rightarrow (\forall x)Q(x)$

⑧ $(\exists x)P(x) \rightarrow (\forall x)Q(x) \Rightarrow (\forall x)[P(x) \rightarrow Q(x)]$

⑨ $(\forall x)[P(x) \leftrightarrow Q(x)] \Rightarrow (\forall x)P(x) \leftrightarrow (\forall x)Q(x)$

$\exists x P(x) \rightarrow \forall x Q(x) \Rightarrow \forall x [P(x) \rightarrow Q(x)] \Rightarrow \forall x P(x) \rightarrow \forall x Q(x)$

定理 2.11 设 $P(x, y)$ 是以 D 为论域的谓词公式，则

① $(\forall x)(\forall y)P(x, y) \Leftrightarrow (\forall y)(\forall x)P(x, y)$

② $(\exists x)(\exists y)P(x, y) \Leftrightarrow (\exists y)(\exists x)P(x, y)$

③ $(\forall x)(\forall y)P(x, y) \Rightarrow (\exists y)(\forall x)P(x, y)$

④ $(\forall y)(\forall x)P(x, y) \Rightarrow (\exists x)(\forall y)P(x, y)$

⑤ $(\exists y)(\forall x)P(x, y) \Rightarrow (\forall x)(\exists y)P(x, y)$

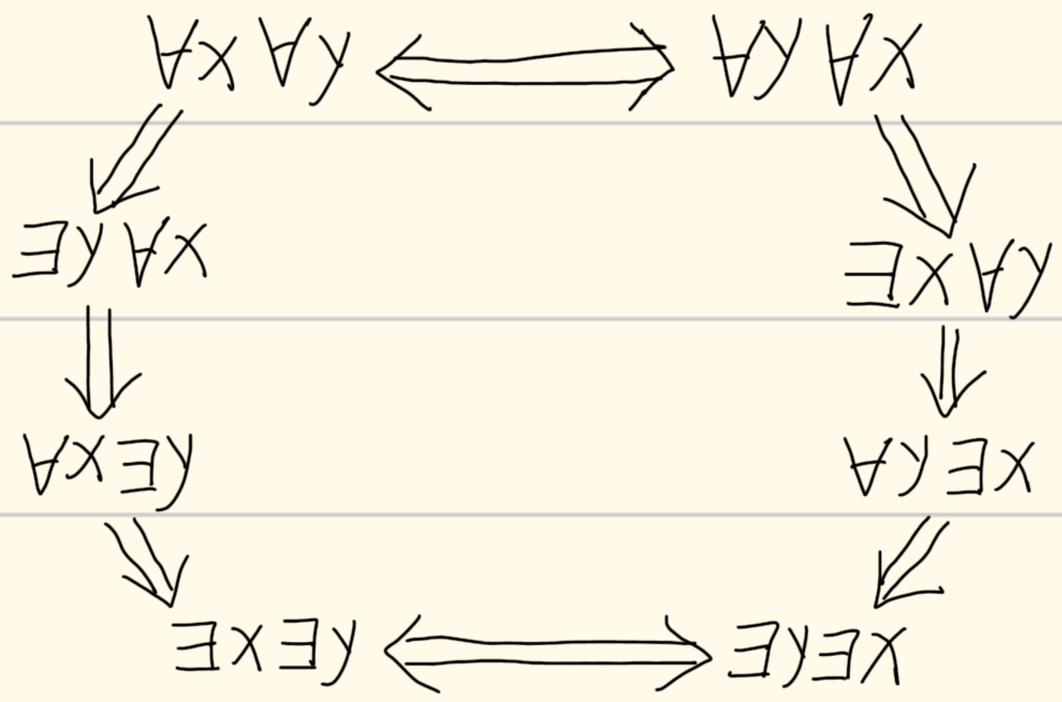
⑥ $(\exists x)(\forall y)P(x, y) \Rightarrow (\forall y)(\exists x)P(x, y)$

⑦ $(\forall x)(\exists y)P(x, y) \Rightarrow (\exists y)(\exists x)P(x, y)$

⑧ $(\forall y)(\exists x)P(x, y) \Rightarrow (\exists x)(\exists y)P(x, y)$

⑨ $(\forall x)(\forall y)P(x, y) \Rightarrow (\exists x)(\exists y)P(x, y)$

⑩ $(\forall x)(\forall y)P(x, y) \Rightarrow (\exists y)(\exists x)P(x, y)$



推理规则

定理 2.9 设 $G(x)$ 是以 D 为论域的谓词公式，y 是不出现在 $G(x)$ 中的自由变元，c 是常量标识符，则

① $(\forall x)G(x) \Rightarrow G(y)$　　全称指定规则，记为 US

$(\forall x)G(x) \Rightarrow G(c)$

② $(\exists x)G(x) \Rightarrow G(c)$　　存在指定规则，记为 ES

③ $G(y) \Rightarrow (\forall x)G(x)$　　全称推广规则，记为 UG

④ $G(c) \Rightarrow (\exists x)G(x)$　　存在推广规则，记为 EG

$G(y) \Rightarrow (\exists x)G(x)$

⑤ P规则（P、P附加）

⑥ T规则（TE、TI）

⑦ CP规则

Ch2 习题集

1. 把下列命题翻译成谓词公式：

（3）除非所有的会员都参加，这个活动才有意义。

活动有意义：$Y(x)$

x为会员：$M(x)$

x参加活动y：$A(x,y)$

该活动：a

$$Y(a)\longrightarrow \forall x[M(x)\longrightarrow A(x,a)]$$

（不可写为$\forall x[M(x)\rightarrow A(x,a)]\rightarrow Y(a)$）

5. 把下列语句符号化，并确定相应谓词公式是永真式、可满足公式、还是矛盾式。

（2）诚实的人都讲实话。小林不是诚实的，因而小林不讲实话。

$H(x)$：x诚实

$T(x)$：x讲实话

a：小林

$$(\forall x[H(x)\rightarrow T(x)]\wedge\neg H(a))\longrightarrow\neg T(a)$$

可满足式（并非永真，$P\rightarrow Q$但$\neg P\rightarrow\neg Q$未必成立）

12. 设 G 的前束范式为 $(\exists x)(\forall y)P(x, y)$，其中 $P(x, y)$ 不含 x 和 y 以外的变元；设 f 是不出现在 $P(x, y)$ 中的函数符号。证明：G 是永真式当且仅当 $(\exists x)P(x, f(x))$ 为永真式。

证明： 1）充分性：

当 G 为永真式，及至少存在一个 x=a，使得∀(y)P(a,y)为永真，及对论域中任意的元素 b，P(a,b)为真，设函数 f（a）= b,那么 P(a, f(a))为真，及∃(x) P(x,f(x))为真

2）必要性：

当∃(x) P(x,f(x))为永真时，及至少存在一个 x=a， 在任意的 f(a)取任意论域中的值时，都为真，及∀(y)P(a,y)为真，所以 G 为永真

综上所述，命题成立

13. 证明下列各式成立。

(3) $(\forall x)[\sim P(x)\rightarrow Q(x)]\wedge(\forall x)[\sim Q(x)]\Rightarrow P(x)$

左式 $\equiv \forall x[(\neg P(x)\rightarrow Q(x))\wedge\neg Q(x)]$

$\Rightarrow(\neg P(x)\rightarrow Q(x))\wedge\neg Q(x)$ //GS

$\equiv\neg Q(x)\wedge(\neg Q(x)\rightarrow P(x))$ //逆否TE

$\Rightarrow P(x)$ //假言TI

(5) $(\exists x)[P(x)\rightarrow\sim Q(x)]\wedge(\forall x)P(x)\Rightarrow\sim(\forall x)Q(x)$

左式 $\equiv(\exists x)[\neg P(x)\vee\neg Q(x)]\wedge(\forall x)P(x)$

$\equiv\neg(\forall x)[P(x)\wedge Q(x)]\wedge(\forall x)P(x)$ //添加两次否定

$\Rightarrow Q(x)$

15. 下面给出了对 $(\forall x)[P(x)\vee(Q(x)]\Rightarrow(\forall x)P(x)\vee(\forall x)Q(x)$ 的证明：

$(\forall x)[P(x)\vee(Q(x)]\Leftrightarrow\sim(\exists x)[\sim(P(x)\vee Q(x))]$

$\Leftrightarrow\sim(\exists x)[\sim P(x)\wedge\sim Q(x)]$

$\Rightarrow\sim((\exists x)[\sim P(x)]\wedge(\exists x)[\sim Q(x)])$ ✗

$\Leftrightarrow(\sim(\exists x)[\sim P(x)])\vee(\sim(\exists x)[\sim Q(x)])$

$\Leftrightarrow(\forall x)P(x)\vee(\forall x)Q(x)$

试判断这个证明是否正确。你能给出一个证明吗？

$\exists x[\neg P(x)\wedge\neg Q(x)]\Rightarrow\exists x\neg P(x)\wedge\exists x\neg Q(x)$成立

但$P\Rightarrow Q$成立未必有$\neg P\Rightarrow\neg Q$成立

16. 演绎证明下列各式：

(3) $(\forall x)[P(x) \rightarrow Q(x)], (\forall x)[R(x) \rightarrow \sim Q(x)] \Rightarrow (\forall x)[R(x) \rightarrow \sim P(x)]$

(4) $(\forall x)[P(x) \rightarrow (Q(y) \wedge R(x))], (\exists x)P(x) \Rightarrow Q(y) \wedge (\exists x)[P(x) \wedge R(x)]$

（3）∀(x)[P(x) →Q(x)]， ∀(x)[R(x) →~Q(x)] ⇒∀(x)[R(x) →~P(x)]

证明：

[1]	∀(x)[R(x) →~Q(x)]	p
[2]	R(x) →~Q(x)	US[1]
[3]	Q(x) →~ R(x)	T[2]E
[4]	∀(x)[P(x) →Q(x)]	p
[5]	P(x) →Q(x)	US[4]
[6]	P(x) →~ R(x)	T[3,5]I
[7]	R(x) →~ P(x)	T[6]E
[8]	∀(x)[R(x) →~P(x)]	UG[7]

（4）∀(x)[P(x) →(Q(y) ∧R(x))], ∃(x)P(x) ⇒ Q(y) ∧∃(x) [P(x) ∧R(x)]

证明：

[1]	∀(x)[P(x) →(Q(y) ∧R(x))]	p
[2]	P(a) →(Q(y) ∧R(a))	US[1]
[3]	∃(x)P(x)	p
[4]	P(a)	ES[3]
[5]	Q(y) ∧R(a)	T[2,4]I
[6]	Q(y) ∧R(a) ∧P(a)	T[4,5]I
[7]	Q(y) ∧∃(x) [P(x) ∧R(x)]	EG[6]

∀xP(x)运用 US变为 P(x)或P(a)
∃x P(x)运用ES变为 P(a)
去掉∀x、∃x后，再进行推理证明
最后用UG、EG添加∀x、∃x

17. 判别下面各个推理是否正确，如果不正确，指出错在什么地方。

(1) ① $(\forall x)P(x) \rightarrow Q(x)$ 无法推出∀x[P(x)→Q(x)] P

② $P(x) \rightarrow Q(x)$ US①

应为 P(y)→Q(x)

(5) ① $P(x) \rightarrow Q(x)$ P

② $(\exists x)P(x) \rightarrow Q(x)$ EG①

应为(∃x)[P(x)→Q(x)]

第3章 集合代数

定义 3.2 设 A 和 B 是两个集合。如果 A 的每个元素都是 B 的元素，则称 A 是 B 的**子集合**，记为 $A\subseteq B$。可以用逻辑形式表示为

$$A\subseteq B\Leftrightarrow(\forall x)[x\in A\rightarrow x\in B]$$

当 A 是 B 的子集合，而 B 至少有一个元素不在 A 中时，称 A 是 B 的**真子集**，记为 $A\subset B$；如果 A 至少有一个元素不在 B 中，记为 $A\not\subseteq B$。

定义 3.3（外延性原理） 设 A 和 B 是两个集合。如果 A 的每个元素都是 B 的元素，B 的每个元素都是 A 的元素，则称 A 和 B **相等**，记为 $A=B$，可用逻辑形式表示为

$$A=B\Leftrightarrow A\subseteq B\wedge B\subseteq A$$

子集关系 $\subseteq$ 的性质

①**自反性** 任何子集 A 都满足 $A\subseteq A$。

②**反对称性** 如果集合 A 和 B 满足 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$，则必有 $A=B$。

③**可传递性** 如果集合 A，B 和 C 满足 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq C$，则必有 $A\subseteq C$。

集合的运算

①并交运算：

①$A\cup B=\{x\in U|x\in A\vee x\in B\}$

②$A\cap B=\{x\in U|x\in A\wedge x\in B\}$

运算律：

①**幂等律** $A\cup A=A$，$A\cap A=A$。

②**交换律** $A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$。

③**结合律** $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$，$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$。

保序律 若 $A\subseteq B$，则 $A\cup C\subseteq B\cup C$，$A\cap C\subseteq B\cap C$

④**分配律** $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$，$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$。

⑤**吸收律** $A\cup(A\cap B)=A$，$A\cap(A\cup B)=A$。

⑥**零一律** $A\cup\varnothing=A$，$A\cap\varnothing=\varnothing$，$A\cup U=U$，$A\cap U=A$。

⑦**互补律** $A\cup\overline{A}=U$，$A\cap\overline{A}=\varnothing$。

⑧**De Morgan 律** $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$，$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$。

②差运算：

③$B-A=\{x\in U|x\in B\wedge x\notin A\}$

运算律：

①$A-B=A\cap\overline{B}$

③补运算：

④$\overline{A}=\{x\in U|x\notin A\}$

运算律：

若 $A\subseteq B$，则 $\overline{B}\subseteq\overline{A}$

④对称差运算：

⑤$A\oplus B=\{x\in U|x\in A-B\vee x\in B-A\}$

运算律：

②$A\oplus B=(A\cap\overline{B})\cup(B\cap\overline{A})$

交律 $A\oplus B=B\oplus A$ 结合 $(A\oplus B)\oplus C=A\oplus(B\oplus C)$

幂集

定义 3.5 设 A 是一个集合，称 $2^A=\{X\mid X\subseteq A\}$ 为 A 的**幂集合**。($P(A)$)

【例 3.5】 $2^{\varnothing}=\{\varnothing\}$，$2^{\{\varnothing\}}=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$。

笛卡尔集

定义 3.6 设给定 $n\geqslant 1$ 个集合 A_1，A_2，…，A_n，称

$$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n=\{(a_1,a_2,\cdots,a_n)\mid a_i\in A_i\wedge 1\leqslant i\leqslant n\}$$

为 A_1，A_2，…，A_n 的**笛卡儿集**。这里的运算“$\times$”称为**直积**。

集合论的证明

例：若 $\overline{A\cap B}\subseteq\overline{A}\cap\overline{B}$，则 $A=B$

证明：由摩根定律知，$\overline{A}\cup\overline{B}\subseteq\overline{A}\cap\overline{B}$

由保序性知，$\overline{A}\cup\overline{A}\cup\overline{B}\subseteq\overline{A}\cup(\overline{A}\cap\overline{B})$

$\overline{A}\cup\overline{B}\subseteq\overline{A}$，即 $\overline{B}\subseteq\overline{A}$，$A\subseteq B$

同理，$\overline{B}\cup\overline{A}\cup\overline{B}\subseteq\overline{B}\cup(\overline{A}\cap\overline{B})$

$\overline{B}\cup\overline{A}\subseteq\overline{B}$，即 $\overline{A}\subseteq\overline{B}$，$B\subseteq A$

故有 $A=B$

例：若 A,B 不存在子集关系，则 $2^A\cup 2^B\subset 2^{A\cup B}$

证明：$X\in 2^A\cup 2^B\equiv X\in 2^A\vee X\in 2^B$

$\equiv X\subseteq A\vee X\subseteq B\Rightarrow X\subseteq A\cup B$

$\equiv X\in 2^{A\cup B}$

故有 $a\in A-B$，$b\in B-A$，使 $\{a,b\}\in 2^{A\cup B}$，

但 $\{a,b\}\notin 2^A\cup 2^B$

故有 $2^A\cup 2^B\subset 2^{A\cup B}$

例：若 A,B,C,D 均为空集，则 $A\times B\subseteq C\times D\equiv A\subseteq C\wedge B\subseteq D$

证明：当 $A\times B\subseteq C\times D$ 时，$(a,b)\in A\times B\Rightarrow$

$(a,b)\in C\times D$，由此可知 $a\in C\wedge b\in D$

$\Rightarrow A\subseteq C\wedge B\subseteq D$

当 $A\subseteq C\wedge B\subseteq D$ 时 $(a,b)\in A\times B\Rightarrow$

$(a,b)\in C\times D$，由此可知 $A\times B\subseteq C\times D$

故有 $A\times B\subseteq C\times D\equiv A\subseteq C\wedge B\subseteq D$

Ch3 习题集

2. 证明：集合之间子集关系“$\subseteq$”的自反性、反对称性和可传递性。

反对称性：任意集合A,B,C

若$A\subseteq B$且$B\subseteq A$，则$A=B$

9. 证明下列各式：

(1) $A\cap(B-C)=(A\cap B)-(A\cap C)$

$A\cap(B-C)=A\cap B\cap\overline{C}=A\cap B\cap(\overline{C}\cup A\cap\overline{A})$

$=A\cap(A\cup\overline{C})\cap B\cap(\overline{C}\cup\overline{A})$

$=(A\cap B)\cap(\overline{A}\cup\overline{C})=(A\cap B)\cap\overline{A\cap C}$

$=(A\cap B)-(A\cap C)$

(5) $A\cap(B\oplus C)=(A\cap B)\oplus(A\cap C)$

左边$=A\cap(\overline{B}\cap C\cup B\cap\overline{C})=A\cap\overline{B}\cap C\cup A\cap B\cap\overline{C}$

右边$=(A\cap B)\cap\overline{A\cap C}\cup\overline{A\cap B}\cap(A\cap C)=A\cap(B\cap\overline{C}\cup\overline{B}\cap C)$

左边=右边，得证

11. 设 $X=A-(B\cap\overline{C})$，$Y=A\cup(\overline{B\cup C})$，试用集合 A，B，C 的特征函数表示出集合 X 和 Y 对应的特征函数。

$$\chi_{(X)}=\chi_{(A)}-\chi_{(B)}\cap\chi_{(\overline{C})}=\chi_{(A)}-\chi_{(B)}\cdot(1-\chi_{(C)})$$

$$\chi_{(Y)}=\chi_{(A)}+\chi_{(\overline{B}\cap\overline{C})}=\chi_{(A)}+(1-\chi_{(B)})\cdot(1-\chi_{(C)})$$

13. 设 A，B，C 是任意集合。判别下列各式是否正确：

(5) $A\cap C=B\cap C\wedge A\cup C=B\cup C\Rightarrow A=B$

反证假设$A\neq B$，则当$C=\varnothing$时，

$A\cap C=B\cap C$，$A\cup C\neq B\cup C$

故假设不成立，$A=B$

16. 求 $A=\{\varnothing,a,\{b\}\}$ 的幂集。

$2^A=\{\varnothing,\{\varnothing\},\{a\},\{\{b\}\},\{\varnothing,a\},\{\varnothing,\{b\}\},\{a,\{b\}\},\{\varnothing,a,\{b\}\}\}$

空子集　单个元素构成的子集

17. 设 A，B 是任意两集合。证明：

(1) $2^A \cup 2^B \subseteq 2^{A \cup B}$

$X \in 2^A \cup 2^B \Leftrightarrow X \subseteq A \vee X \subseteq B \Rightarrow X \subseteq A \cup B$

$\Leftrightarrow X \in 2^{A \cup B}$

19. 设 A，B，C 是 3 个任意集合，$C \neq \varnothing$。证明：$A \subseteq B \Leftrightarrow A \times C \subseteq B \times C$。

充分性：

$\forall a \in A, c \in C$，由 $A \subseteq B$ 知 $a \in B$，

$(a,c) \in A \times C \Rightarrow (a,c) \in B \times C$

必要性：

$\forall (a,c) \in A \times C$，有 $(a,c) \in B \times C$，

$a \in A \Rightarrow a \in B$，即 $A \subseteq B$

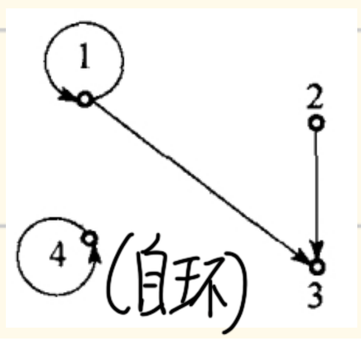
第4章 二元关系

定义 4.1 设 A 和 B 都是已知集合，R 是 A 到 B 的一个确定的二元关系，那么 R 就是 $A\times B$ 的一个合于 $R=\{(x,\ y)\in A\times B\mid xRy\}$ 的**子集合**。

表示方法：

有向图表示法 设 $A=\{x_1,\ \cdots,\ x_m\}$，$B=\{y_1,\ \cdots,\ y_n\}$，$R\subseteq A\times B$。以 A，B 的元素为点（称为结点），当 $(x_i,\ y_j)\in R$ 时，从 x_i 到 y_j 引一条有向弧（或称为有向边），当 $(x_i,\ y_j)\notin R$ 时，则 x_i 与 y_j 间没有边相连结。这样得到的图称为关系 R 的**关系图**。

eg.



关系矩阵表示法 设 $A=\{x_1,\ \cdots,\ x_m\}$，$B=\{y_1,\ \cdots,\ y_n\}$，二元关系 $R\subseteq A\times B$。构造 m 行 n 列的矩阵 $\boldsymbol{M}_R=(m_{ij})_{m\times n}$，其中

$$m_{ij}=\begin{cases}1 & \text{当}(x_i,y_j)\in R\\ 0 & \text{其他}\end{cases}\qquad (i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$$

$\boldsymbol{M}_R$ 称为 R 的**关系矩阵**。

eg.

$$\boldsymbol{M}_R=\begin{pmatrix}1&0&1&0&1\\0&1&0&0&1\\0&0&1&0&0\end{pmatrix}$$

【例 4.8】 集合 A 上的关系 $R=\{(x,\ y)\in A\times A\mid x=y\}$，称为集合 A 上的**恒等关系**，特别标记为 I_A。在 I_A 对应的关系图中，每个元素对应的结点上都有一个自环，不同结点之间没有边联系。I_A 对应的关系矩阵 $\boldsymbol{M}_{I_A}$ 是一个单位阵。 ■

二元关系性质

①R 是自反关系$\Leftrightarrow(\forall x\in A)xRx$

$\Leftrightarrow \forall x[x\in A\rightarrow(x,x)\in R]$

(包含所有(x,x)序偶)

[公式的等价、蕴含、集合的子集关系具有自反性]

$M_R=\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&\ddots&1\end{bmatrix}$

②R 是反自反的$\Leftrightarrow(\forall x\in A)[(x,\ x)\notin R]$

$\Leftrightarrow \forall x[x\in A\rightarrow(x,x)\notin R]$

(不含任一(x,x)序偶)

[集合的真子集、数的严格小于关系具有反自反性]

$M_R=\begin{bmatrix}0&&\\&0&\\&&\ddots&0\end{bmatrix}$

③R 是对称关系$\Leftrightarrow(\forall x,\ y\in A)[xRy\rightarrow yRx]$

$\Leftrightarrow (x,y)\in R\Rightarrow(y,x)\in R$

(序偶均成对出现)

[公式的等价、集合的相等关系具有对称性]

M_R对称矩阵

④R 是**反对称的**$\Leftrightarrow(\forall x, y\in A)[((x, y)\in R\wedge(y, x)\in R)\rightarrow x=y]$

$\Leftrightarrow (x,y)\in R \wedge (y,x)\in R \Rightarrow x=y$

(除了I_A,均无任一成对出现)

[两数的整除关系具有反对称性]

M_R反对称阵

注：自反/反自反互斥，但对称/反对称不互斥

如 $R=\{(a,a)\}$，$R=\varnothing$ 同时对称&反对称

③R 是**可传递关系**$\Leftrightarrow(\forall x, y, z\in A)[xRy\wedge yRz\rightarrow xRz]$

$\Leftrightarrow (x,y)\in R, (y,z)\in R \Rightarrow (x,z)\in R$

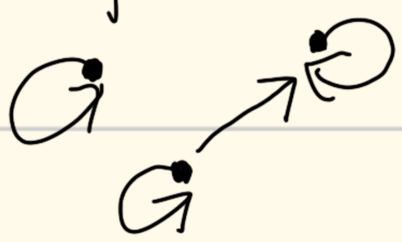
(可传递推出的序偶一定在集合内)

M_R中，若$m_{ij}=1$

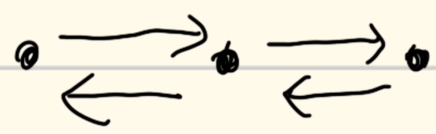
且$m_{jk}=1$，则$m_{ik}=1$

关系图表示

Reflexive



Symmetric



Transitive

R是自反的 $\Leftrightarrow I_A\subseteq R$

R是反自反的 $\Leftrightarrow R\cap I_A=\varnothing$

R是对称的 $\Leftrightarrow R=R^{-1}$

R是反对称的 $\Leftrightarrow R\cap R^{-1}\subseteq I_A$

R是传递的 $\Leftrightarrow R^2\subseteq R$

关系的二元运算

定义 4.4 设 R 和 S 都是从集合 A 到集合 B 的二元关系，则 $R\cup S$，$R\cap S$，$\overline{R}$，$\overline{S}$，$R-S$，$R\oplus S$ 等也都是从 A 到 B 的**二元关系**，且

$$R\cup S=\{(x,y)\in A\times B\mid (x,y)\in R\vee(x,y)\in S\}$$
$$R\cap S=\{(x,y)\in A\times B\mid (x,y)\in R\wedge(x,y)\in S\}$$
$$\overline{R}=\{(x,y)\in A\times B\mid (x,y)\notin R\}$$
$$R-S=\{(x,y)\in A\times B\mid (x,y)\in R\wedge(x,y)\notin S\}$$
$$R\oplus S=\{(x,y)\in A\times B\mid (x,y)\in R\cup S\wedge(x,y)\notin R\cap S\}$$

关系的复合运算

定义 4.5 设 R 是集合 A 到 B 的二元关系，S 是集合 B 到 C 的二元关系，则

$$R\circ S=\{(x,z)\in A\times C\mid(\exists y\in B)[(x,y)\in R\wedge(y,z)\in S]\}$$

称为 R 和 S 的**复合关系**。

性质：不可交换

设$R\subseteq A\times B$，$S\subseteq B\times C$

$R\circ S\neq S\circ R$

可结合性

设$R\subseteq A\times B$，$S\subseteq B\times C$，$T\subseteq C\times D$

$(R\circ S)\circ T=R\circ(S\circ T)$

设 R 是 A 上的二元关系，简记

$$R^2 = R \circ R, \quad R^3 = R \circ R \circ R$$

一般地，$R^{m+1} = R^m \circ R (m \geqslant 0)$；特别地，$R^0 = I_A$，$R^1 = R$。

容易证明，当 m 和 n 都是非负整数时，

$$R^m \circ R^n = R^{m+n}, \quad (R^m)^n = R^{mn}$$

定理 4.2 设 R，S，T 都是集合 A 上的二元关系，则

① $R \circ (S \cup T) = (R \circ S) \cup (R \circ T)$　② $(S \cup T) \circ R = (S \circ R) \cup (T \circ R)$

③ $R \circ (S \cap T) \subseteq (R \circ S) \cap (R \circ T)$　④ $(S \cap T) \circ R \subseteq (S \circ R) \cap (T \circ R)$

推广：$I_A^n = I_A$　$I_A \circ R = R$

复合关系的关系矩阵

eg. $M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$　$M_S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$M_{R \circ S} = M_R \circ M_S = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

关系的逆运算

定义 4.6 设 R 是集合 A 到 B 的二元关系，则

$$R^{-1} = \{(y,x) \in B \times A \mid (x,y) \in R\}$$

称为关系 R 的**逆关系**。

性质

定理 4.3 设 R 和 S 都是集合 A 到 B 的二元关系，则

① $(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$

② $(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$

③ $(\overline{R})^{-1} = \overline{R^{-1}}$

④ $(R - S)^{-1} = R^{-1} - S^{-1}$

⑤ $(R^{-1})^{-1} = R$

定理 4.4 设二元关系 $R \subseteq A \times B$，$S \subseteq B \times C$，$T \subseteq C \times D$，则 $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$。

$$(R^n)^{-1} = (R \circ R \circ \cdots \circ R)^{-1} = (R^{-1})^n$$

关系的闭包

设R为一个二元关系，P为关系的一个性质，如果存在关系S满足

① S具有性质P

② $R \subseteq S$

③ 任何满足①，②关系T又蕴涵 $S \subseteq T$

则S是R的P闭包

R 的自反闭包、对称闭包和传递闭包分别记为 $r(R)$，$s(R)$ 和 $t(R)$。

(不存在反自反闭包、反对称闭包等)

性质：

① 若R是自反的，则 $r(R) = R$

若R是对称的，则 $s(R) = R$

若R是传递的，则 $t(R) = R$

② 若 $R_1 \subseteq R_2$，则 $r(R_1) \subseteq r(R_2)$，$s(R_1) \subseteq s(R_2)$，$t(R_1) \subseteq t(R_2)$

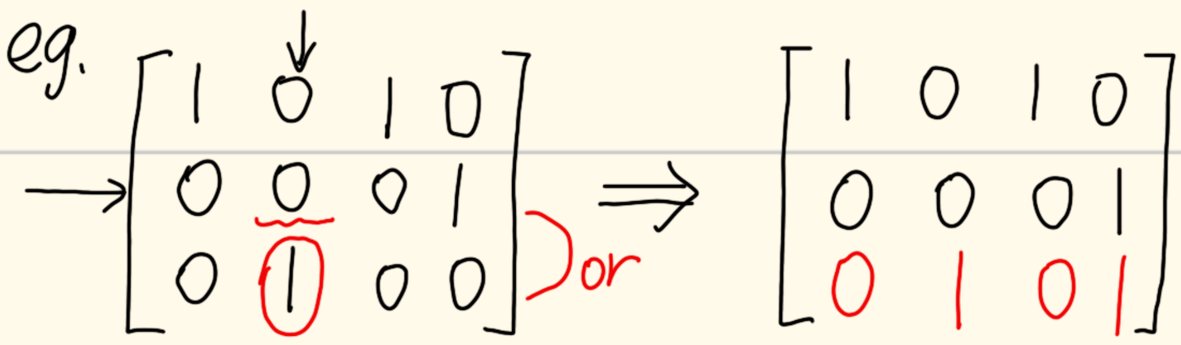
③ **定理 4.5** 设 R 是集合 A 上的一个二元关系，那么

① $r(R)=R\cup I_A$　② $s(R)=R\cup R^{-1}$　③ $t(R)=R\cup R^2\cup R^3\cup\cdots=\bigcup_{i=1}^{\infty}R^i$

④ 求t(R)的Warshall算法

方法要点：对关系矩阵$\mathbf{M_R}$依次按列扫描，当第 i 列中元素$\mathbf{M_{ji}=1}$，则让第 j行与第i 行对应元素作逻辑或运算，其结果放于第 j 行。

eg.



闭包运算间的关系

① R自反 ⇒ S(R)、t(R)自反[均含I_A]

② R对称 ⇒ r(R)、t(R)对称[$R=R^{-1}$]

③ R传递 ⇒ r(R)传递[$t(R\cup I_A)=t(R)\cup I_A$]

① $rs(R)=sr(R)$

② $rt(R)=tr(R)$

③ $st(R)\subseteq ts(R)$

Ch4 习题集

4. 设 A 是含 n 个元素的集合，请问在 A 上可以定义出多少个二元关系？

$R \subseteq A \times A$

二元关系数就是 $A \times A$ 笛卡集子集数，即 $2^{A \times A}$ 元素个数：$2^{n \times n}$

6. 设在整数集合 $\mathbf{Z}$ 上定义了如下关系：

(1) $xR_1y \Leftrightarrow x \mid y$　　(2) $xR_2y \Leftrightarrow x \equiv y \pmod m$，$m$ 为确定的正整数

(3) $xR_3y \Leftrightarrow x \cdot y > 0$　　(4) $xR_4y \Leftrightarrow x = y$ 或 $|x-y| = 1$

(5) $xR_5y \Leftrightarrow x^2 > y^2$

在下表中用√或×填空，以确定这 5 个关系是否满足对应的性质。

性质 \ 关系	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5
自反性			×		
反自反性					
对称性					
反对称性	×				
传递性					

R_1 不具有反对称性：$(-1,1)\ (1,-1)$　$-1/1=-1\cdots 0$　$1/-1=-1\cdots 0$

R_3 不具有自反性：$(0,0)$　$0\times 0=0\not>0$

8. 设 R 和 S 都是集合 A 上的二元关系，它们经过关系运算后得到 A 上的一个新关系。试判别当 R 和 S 同时具有下表左列某种指定性质时，经过指定的运算后所得新关系也仍保持这种性质，把所得结论以√或×的形式填在下表中相应的位置上。

性质 \ 运算	$R \cap S$	$R \cup S$	$R - S$	$R \circ S$	$\overline{R}$	R^{-1}
自反性						
反自反性						
对称性						
反对称性						
传递性	√			×	×	

$R \cap S$ 传递性：R 传递，$R^2 \subseteq R$；S 传递，$S^2 \subseteq S$ $\longrightarrow R^2 \cap S^2 \subseteq R \cap S$

$(R \cap S)^2 = R^2 \cap S^2 \cap R \circ S \cap S \circ R \subseteq R \cap S$

$R \circ S$ 传递性：$R = \{(a,b),(c,d)\}$

$S = \{(b,c),(d,e)\}$

$R \circ S = \{(a,c),(c,e)\}$ 不具有传递性

$\overline{R}$ 传递性：$A = \{a,b,c\}$

$R = \{(a,b)\}$

$\overline{R} = \{(a,c)(c,a),(b,a),(c,b),(a,a),(b,b),(c,c)\}$ 不具有传递性

结论：$R \cap S$、R^{-1} 保持自反、对称、传递

$R \cup S$ 不保持传递

R−S 不保持自反、传递
R∘S 不保持对称、传递

9. 判定满足下述每一种条件的关系是否存在，如果存在，举例说明。

(3) 既是传递的又是反传递的。

存在

$A=\{a,b,c\}$

$R=\{(a,b)\}$ 传递且反传递

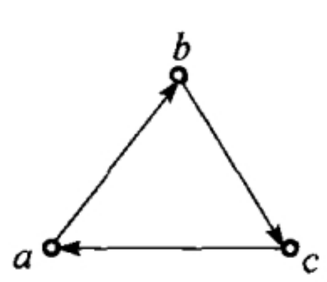
(2) 既是对称的又是反对称的。

存在

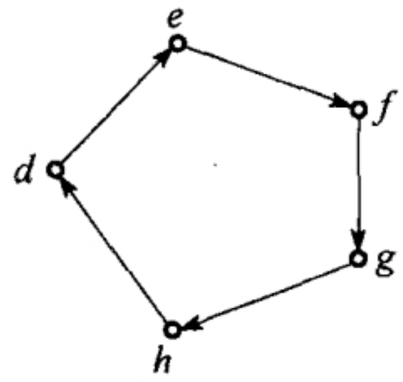
$R\subseteq I_A$

R必定对称且反对称

12. 设 $A=\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$，$A$ 上的二元关系 R 对应的关系图如图 4-5 所示。求使 $R^m=R^n$ 的最小整数 m 和 $n(m<n)$。



R_1



R_2

$R=R_1\cup R_2$

又因 $I_{A_1}=R_1^3$，$I_{A_2}=R_2^5$

$R^{15}=R_1^{15}\cup R_2^{15}\cup R_1\circ R_2^{14}\cup R_1^2\circ R_2^{13}\cdots$

$R_1\circ R_2=R_2\circ R_1=\varnothing$

$=I_{A_1}^5\cup I_{A_2}^3=I_{A_1}\cup I_{A_2}=I$

$R^{16}=R\circ R^{15}=R$

故 $m=1, n=16$

16. 设 R_1 和 R_2 是集合 A 上的两个二元关系。证明：

(1) $r(R_1\cup R_2)=r(R_1)\cup r(R_2)$　　$r(R_1\cap R_2)=r(R_1)\cap r(R_2)$

(2) $s(R_1\cup R_2)=s(R_1)\cup s(R_2)$　　$s(R_1\cap R_2)\subseteq s(R_1)\cap s(R_2)$

(3) $t(R_1\cup R_2)\supseteq t(R_1)\cup t(R_2)$

(1) $r(R_1\cup R_2)=R_1\cup R_2\cup I_A=(R_1\cup I_A)\cup(R_2\cup I_A)=r(R_1)\cup r(R_2)$

(2) $S(R_1\cap R_2)=(R_1\cap R_2)\cup(R_1\cap R_2)^{-1}=(R_1\cap R_2)\cup(R_1^{-1}\cap R_2^{-1})$

$=(R_1\cup R_1^{-1})\cap(R_1\cup R_2^{-1})\cap(R_2\cup R_1^{-1})\cap(R_2\cup R_2^{-1})$

$\Rightarrow(R_1\cup R_1^{-1})\cap(R_2\cup R_2^{-1})=S(R_1)\cap S(R_2)$

(3) $R_1\subseteq R_1\cup R_2$　　$t(R_1)\subseteq t(R_1\cup R_2)$

$R_2\subseteq R_1\cup R_2$　　$t(R_2)\subseteq t(R_1\cup R_2)$

$t(R_1)\cup t(R_2)\subseteq t(R_1\cup R_2)$

第五章 特殊关系

等价关系

定义 5.1 设 R 是非空集合 A 上的一个二元关系。当 R 同时具有自反、对称和可传递性质时，称 R 是 A 上的一个**等价关系**。

如：集合A上的全关系 $A\times A$ 是等价关系
整数集合Z上模k同余是等价关系
命题公式$\Leftrightarrow$、集合间=、图节点集连通是等价关系

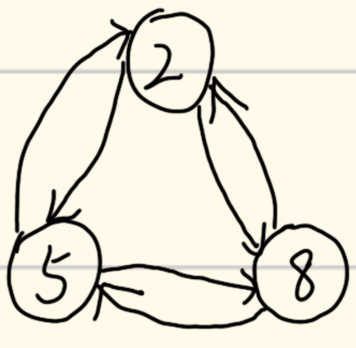
等价类

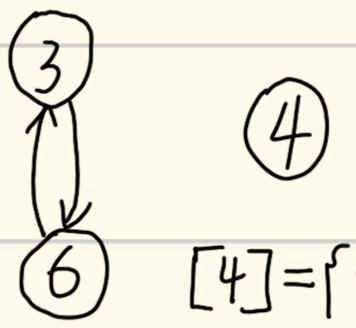
定义 5.2 设 R 是非空集合 A 上的一个等价关系。对每一个元素 $a\in A$，记

$$[a]_R = \{x \mid x \in A, \text{且 } xRa\}$$

称 A 的子集合 $[a]_R$ 为关系 R 的一个**等价类**。在不引起混淆的情况下，$[a]_R$ 可以简记为 $[a]$。

显然，等价类 $[a]$ 是一个非空集合。a 称为这个等价类的**代表元**。





[4]={4}

[8]={2,5,8}　[3]=[6]={3,6}

定理 5.1 设 R 是非空集合 A 上的等价关系，则

①对任意 $a, b\in A$，或者 $[a]=[b]$ 或者 $[a]\wedge[b]=\varnothing$。

② $\bigcup_a [a]=A$。

分划

定义 5.3 设 A 是一个非空集合，A_1，A_2，…，A_m 都是 A 的非空子集，$S=\{A_1, A_2, \cdots, A_m\}$。如果

①对 $\forall i\neq j (i, j=1, 2, \cdots m)$ 都有 $A_i\cap A_j=\varnothing$；

② $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_m=A$；

则称 S 是集合 A 上的一个**分划**。

定理 5.2 非空集合 A 上的每个等价关系都能决定 A 的一个分划；而 A 的每个分划都能导出 A 上的一个二元等价关系。

$\forall a,b\in A, [a]=[b]$ 或 $[a]\wedge[b]=\varnothing$
$\bigcup_a [a]=A$

分划 $A=\{S_1, S_2, S_3, \cdots\}$
$R=S_1\times S_1 \cup S_2\times S_2 \cup\cdots\cup S_i\times S_i \cup\cdots\cdots$
(全关系是等价的)

偏序集

定义 5.4 设 R 是集合 A 上的二元关系。如果 R 是自反的、反对称的和可传递的，则称 R 是 A 上的一个**偏序关系**。相应地，A 称为（关于偏序 R 的）**偏序集**，记为 $\langle A, R\rangle$。

如：正整数集合上的整除关系是偏序关系

实数上的 $\leqslant$、集合间的 $\subseteq$、命题公式的 $\Rightarrow$、字符串的字典序

一般把偏序关系标记为 $\preccurlyeq$，偏序集记为 $\langle A, \preccurlyeq\rangle$

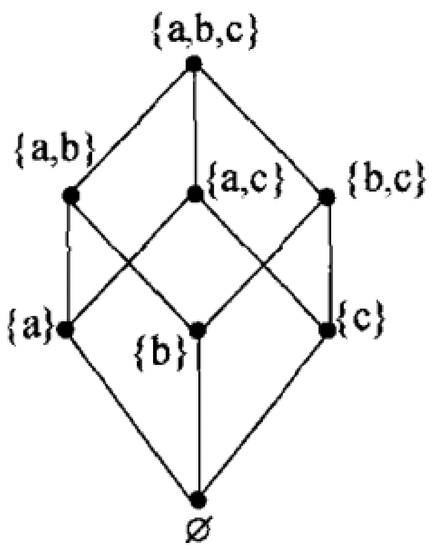
盖住关系

这就是说，偏序关系 R 的 Hasse 图是由 R 的一个真子集 cover(R)的关系图构成的。这个 cover(R)又称为**盖住关系**，可以用符号表示为

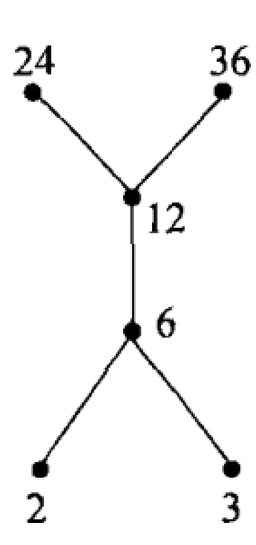
$$\text{cover}(R) = \{(x,y) \in R \mid (\forall t \in A)[(t \neq x \wedge t \neq y) \rightarrow ((x,t) \notin R \wedge (t,y) \notin R)]\}$$

(删去自反序偶、删去传递产生的序偶)

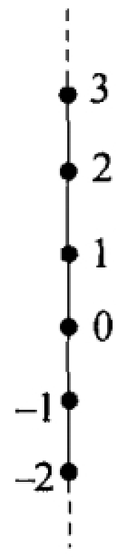
Hasse 图



a)



b)



c)

偏序集$\langle A,\leqslant\rangle$中的特殊元素

③如果对所有 $b \in A$ 均有 $b \preccurlyeq a$，则称 a 是 A 中的一个**最大元**。

④如果对所有 $b \in A$ 均有 $a \preccurlyeq b$，则称 a 是 A 中的一个**最小元**。

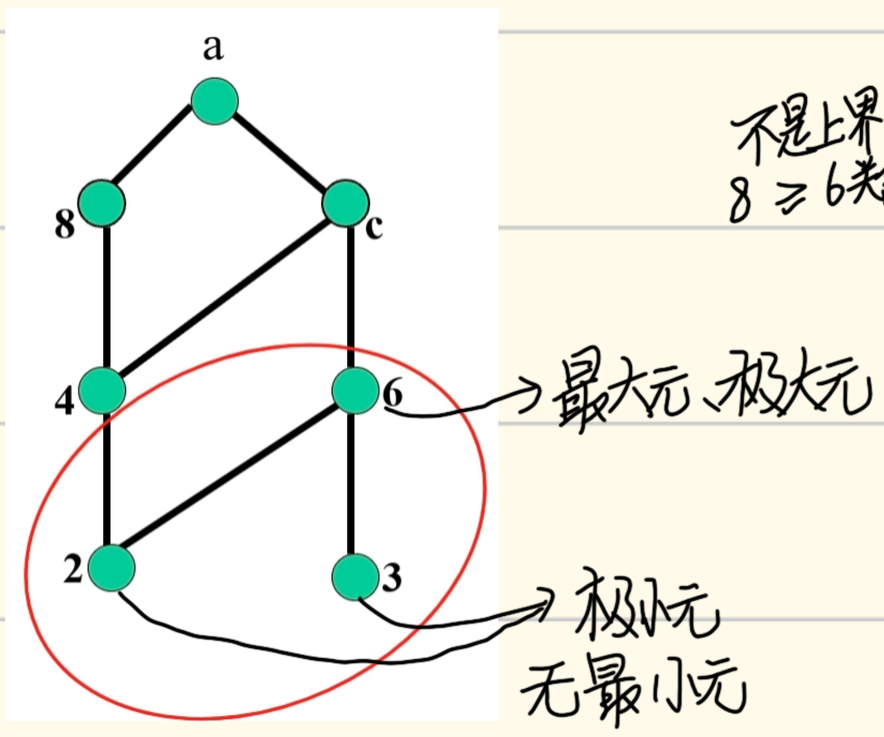
③ 如果不存在c ∈B使a ≤ c且c ≠ a，则称a是B的极大元。

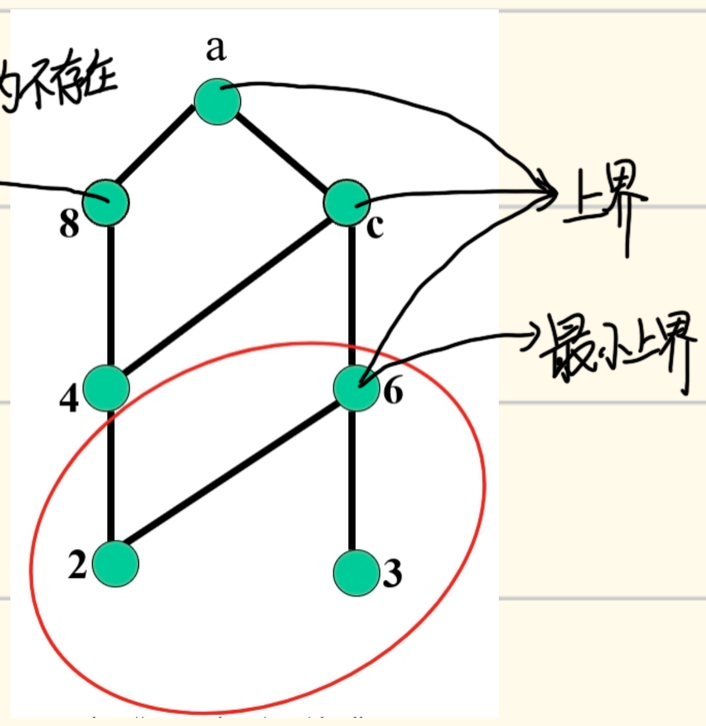
④ 如果不存在c ∈B使 c≤ b且c≠ b，则称 b是B的极小元。

定义 5.9 设 $\langle A, \preccurlyeq\rangle$ 是偏序集，$B \subseteq A$，$a \in A$。

①如果对所有 $b \in B$，都有 $b \preccurlyeq a$，则称 a 是子集 B 的一个**上界**。进一步，如果 c 是 B 的任意一个上界时都有 $a \preccurlyeq c$，则称 a 是 B 的**最小上界**。

②如果对所有 $b \in B$，都有 $a \preccurlyeq b$，则称 a 是子集 B 的一个**下界**。进一步，如果 c 是 B 的任意一个下界时都有 $c \preccurlyeq a$，则称 a 是 B 的**最大下界**。





全序集

定义 5.5 设 a 和 b 是偏序集 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 中的两个元素。如果 $a \preccurlyeq b$ 或 $b \preccurlyeq a$ 之一成立，则说 a 和 b 是**可比较的**；否则，a 和 b 是**不可比较的**。

定义 5.6 如果偏序集 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 中的任何两个元素都是可比较的，则称 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 是**全序集**，称 $\preccurlyeq$ 为 A 上的一个**全序关系**。

全序集是一条链状Hasse图

良序集

定义 5.10 设 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 是偏序集，如果 A 的任何非空子集 B 都有最小元，就称 A 为**良序集**。

如：$\langle N, \leqslant \rangle$ 是良序集，$\langle Z, \leqslant \rangle$ 不是

定理:每一良序集必是全序集;
每一有限全序集必为良序集。

全序集 $\xrightarrow{\text{有限}}$ 良序集

偏序集到全序集的转化

定义 5.11 设 $\preccurlyeq$ 和 $\preccurlyeq'$ 是集合 A 上的两个偏序关系。如果对任何 $a, b \in A$，当 $a \preccurlyeq b$ 时，必然导致 $a \preccurlyeq' b$，则称关系 $\preccurlyeq$ 与 $\preccurlyeq'$ 是可比较的。

$$(\forall x, y \in A)[x \leqslant y \Rightarrow x \leqslant' y]$$

定义 5.12 设 $\preccurlyeq$ 和 $\preccurlyeq'$ 是集合 A 上的两个偏序关系。如果 $\preccurlyeq$ 与 $\preccurlyeq'$ 是可比
全序关系，则称关系 $\preccurlyeq'$ 是关系 $\preccurlyeq$ 的一个**拓扑排序**。

拓扑排序：

拓扑排序算法：

输入： $\langle A, \preccurlyeq \rangle$

输出： $\langle A, \preccurlyeq' \rangle$

步骤 1： 任选 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 中的一个极小元 x；

步骤 2： 令 $A = A - \{x\}$；

步骤 3： 如果 $A = \varnothing$，算法停止；否则执行

①任选极小元 $y \in A$；

②定义序关系 $x \preccurlyeq' y$；

③令 $A = A - \{y\}$，$x = y$，转步骤 3。

定理 5.3 任何有限偏序集都可以转变成全序集。

eg. $\langle \{2, 3, 6, 12, 24, 36\}, | \rangle$

$\Rightarrow 2 \leqslant' 3 \leqslant' 6 \leqslant' 12 \leqslant' 24 \leqslant' 36$

Ch5 习题集

3. 集合 $A=\{1, 2, 3, 4\}$ 的一个分划为 $S_0=\{\underbrace{\{1, 2, 4\}}_{A}, \underbrace{\{3\}}_{B}\}$，求由 S_0 导出的 A 上的一个等价关系 R。

$$R = A\times A \cup B\times B = \{(1,1),(2,2),(4,4),(1,2),(1,4),(2,4),(2,1),(4,1),(4,2)\} \cup \{(3,3)\}$$

4. 试确定在 4 个元素的集合上可以定义的等价关系数目。

一个分划 $\Longleftrightarrow$（一一对应）一种等价关系

4分划：1-1-1-1　　1种

3分划：1-1-2　　$C_4^2C_2^1/A_2^2=6$种　（平分分堆需除A_n^n）

2分划：2-2　　$C_4^2C_2^2/A_2^2=3$种

1-3　　$C_4^3=4$种

1分划：4　　1种

5. 设 R_1 和 R_2 是非空集合 A 上的两个等价关系。试确定下列各个关系是否是 A 上的等价关系。如果是，加以证明；如果不是，举例说明。

(1) $R_1 \cup R_2$　　(2) $R_1 \cap R_2$　　(3) $r(R_1 - R_2)$　　(4) $R_1 \circ R_2$

不传递　　不传递　　不对称、不传递

6. 设 R 是非空集合 A 上的一个二元关系，具有对称性和传递性。证明：如果对每一个 $x\in A$，存在 $y\in A$ 使 xRy，那么，R 是 A 上的等价关系。

$\forall x\in A, \exists y\in A, s.t.\ xRy$

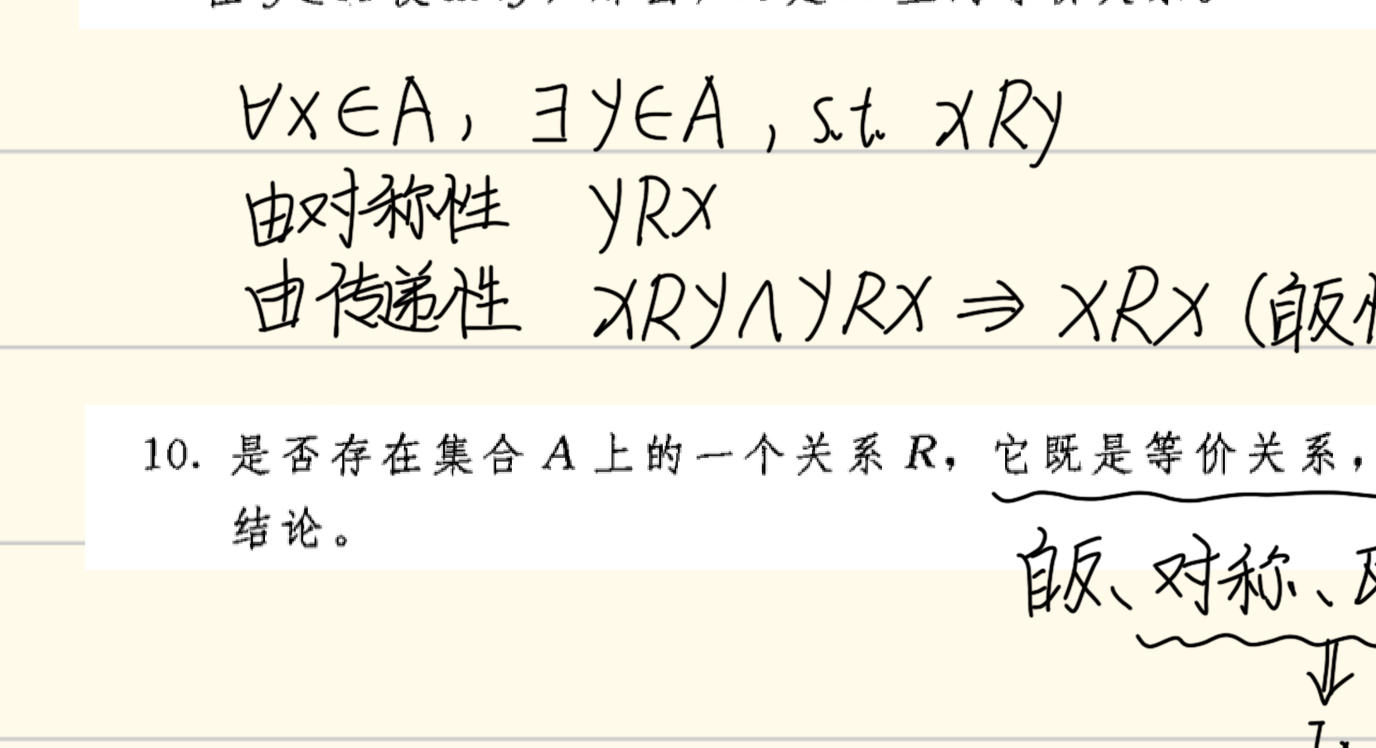
由对称性　yRx

由传递性　$xRy \wedge yRx \Rightarrow xRx$（自反性）

10. 是否存在集合 A 上的一个关系 R，它既是等价关系，又是偏序关系？证明或举例说明你的结论。

自反、对称、反对称、传递 $\Downarrow$ I_A

15. 设 $A=\{a, b, c, d\}$。试构造关于偏序集 $\langle 2^A, \subseteq\rangle$ 的一个全序集 $\langle 2^A, \leqslant\rangle$，使得 $\leqslant$ 是 $\subseteq$ 的拓扑排序。



拓扑排序：

$\varnothing \leqslant \{a\} \leqslant \{b\} \leqslant \{c\} \leqslant \{d\} \leqslant \{a,b\} \leqslant \{a,c\} \leqslant \{a,d\} \leqslant \{b,c\} \leqslant \{b,d\} \leqslant \{c,d\} \leqslant \{a,b,c\} \leqslant \{a,c,d\} \leqslant \{a,b,d\} \leqslant \{b,c,d\} \leqslant \{a,b,c,d\}$

第六章 函数

函数的定义

定义 6.1 设 X 和 Y 是两个非空集合，f 是 X 到 Y 的一个关系，如果对 $\forall x \in X$，$\exists$ 唯一的元素 $y \in Y$，$\exists \langle x, y\rangle \in f$，则称关系 f 为集合 X 到 Y 的一个（一元全）**函数**，记为 f：$X \to Y$。假如 $\langle x, y\rangle \in f$，则 x 称为自变量，y 称为在 f 作用下的像。$\langle x, y\rangle \in f$ 也可记作 $y = f(x)$，且记 $f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$。$X$ 称为函数 f 的**定义域**（或**像源集**），Y 称为函数 f 的**值域**（或**像集**）。

(全)函数满足：①处处有定义
②单值

若不是处处有定义，则称为部分函数

例：欧拉函数（正整数集 I_+ 上）

$\varphi(n)$ = 不超过 n 且与 n 互质的正整数个数

$\varphi: I_+ \longrightarrow I_+$

多元函数：一个 r 元函数是如下一个映射

$$f: A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_r \to B_1 \times B_2 \times \cdots \times B_t$$

使得对每个 $(a_1, a_2, \cdots, a_r) \in A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_r$，存在唯一的 $(b_1, b_2, \cdots, b_t)$ 合于 $f(a_1, a_2, \cdots, a_r) = (b_1, b_2, \cdots, b_t)$。

函数与关系

一元函数 $f: X \to Y$ 是一个特殊的二元关系：$f = \{(x, y) \mid f(x) = y\}$

关系的交、并、补、差仍是关系，函数未必

函数的相等

$f = g$：①共同的定义域、值域
②$\forall x \in X$, $f(x) = g(x)$

函数的复合运算

定义 6.4 设 $f: X \to Y$ 和 $g: Y \to Z$ 是两个函数，称 $g \circ f = \{(x, z) \mid (\exists y \in Y)[f(x) = y \wedge g(y) = z]\}$ 为函数 f 和 g 的**复合函数**，即映射 $g \circ f: X \to Z$。

$f \circ g = f(g(x))$

复合顺序从右到左：$\overleftarrow{f \circ g \circ h}$

满足结合律、不满足交换律

$f^n = f^{n-1} \circ f$，特别规定 $f^0 = I_A$

单射、满射和双射

定义 6.3 设 f 是从集合 X 到 Y 的函数。

①如果对所有 t，$s\in X$，当 $t\neq s$ 时 $f(t)\neq f(s)$，则称 f 是一个**单射**。

②如果对所有 $y\in Y$，都存在 $x\in X$，使 $f(x)=y$，则称 f 是一个**满射**。

③如果 f 既是单射又是满射，则称 f 是一个**双射**。

单调函数都是单射

定理 6.1 设 $f: X\to Y$ 和 $g: Y\to Z$ 是两个函数，$g\circ f$ 是复合函数：

①如果 g 和 f 都是单射，则 $g\circ f$ 是单射。

②如果 g 和 f 都是满射，则 $g\circ f$ 是满射。

③如果 g 和 f 都是双射，则 $g\circ f$ 是双射。

若f是有限集合A上的满射，则f必为双射

若f是有限集合A上的单射，则f必为双射

置换

定义 6.5 非空有限集合上的双射称为**置换**。特别地，设 $A=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$，则 A 上的双射叫做 **n 阶置换**。

如果 $\pi: A\to A$ 是一个置换，则它可以表示为

$$\pi=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \pi(a_1) & \pi(a_2) & \cdots & \pi(a_n) \end{pmatrix}$$

其意义是把 a_i 映射成（或变成）$\pi(a_i)$ $(1\leqslant i\leqslant n)$。

A上的n阶置换共有n!种

置换的循环表示

对于置换

$$\pi=\begin{pmatrix} x & y & z & t & s \\ y & t & s & z & x \end{pmatrix}$$

表达的变换, 可以用循环(x y t z s)简化. 一般, 每个置换都可以表示成循环的“积”(复合), 遵守函数复合运算顺序.

置换的复合

如 $\overleftarrow{\pi_1\circ\pi_2}=\overleftarrow{(bc)\circ(ab)}=(acb)$

逆函数

定义 6.6 设 $f: X\to Y$ 是一个函数。如果存在函数 $g: Y\to X$，使得

$$(\forall x)[(g\circ f)(x)=x]\wedge(\forall y)[(f\circ g)(y)=y]$$

则称 g 是 f 的**逆函数**。f 的逆函数一般可简记为 f^{-1}。

f 是集合 X 上的可逆函数时，$f^{-1}\circ f=f\circ f^{-1}=I_x$。

定理 6.2 函数 f 存在逆函数，当且仅当 f 是双射。（证明双射⇒存在g, $f\circ g=I_A$）

定理 6.3 设 $f: X\to Y$ 和 $g: Y\to Z$ 是两个双射，则 $(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$。

eg. $\pi=(1\ 3\ 4)(2\ 6\ 5)$的逆$\pi_2=(1\ 4\ 3)(2\ 5\ 6)$

集合的等势

定义 6.7 如果能够在集合 X 和 Y 之间建立双射，则称 X 和 Y 等势，记为 $X\sim Y$。

如：自然数集$N\sim$正偶数集$2N$，实数集$R\sim(0,1)$，任意两条平形线段等势

定理 6.4 等势是集合族上的等价关系。

自反性：$A \overset{I_A(a)}{\sim} A$

对称性：$A \overset{f}{\sim} B \Rightarrow B \overset{f^{-1}}{\sim} A$

传递性：$A \overset{f}{\sim} B, B \overset{g}{\sim} C \Rightarrow A \overset{f\circ g}{\sim} C$

两个有限集等势当且仅当它们的元素个数相等。

无限集可以与它的真子集等势。

如：A为无限集$\{a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{k+1}, \cdots\}$

$B=\{a_0, a_1, a_2, \cdots, a_k\}\subset A$

$C=A-B=\{a_{k+1}, a_{k+2}, \cdots\}$

$\forall x\in A$，定义$f(x)=a_{i+k+1}$，有 $A \overset{f}{\sim} C=A-B\subset A$

基数

双射：存在逆函数、集合等势、$card(A)=card(B)$

如果 A 是有限集，A 的基数通常记为 $|A|$，它是集合 A 中元素的个数。

$X\sim Y$ 当且仅当 $\mathrm{card}(X)=\mathrm{card}(Y)$。

4。规定：如果存在从A到B的单射，则 card(A) ≤card(B)，
如果这个单射不是双射时，不等号严格成立。

有限集与无限集

定义 6.9 如果 X 是空集合，如果存在自然数 m，使得 $X\sim \mathbf{N}_m$，则称 X 是**有限集**。如果 X 不是有限集，则称它是**无限集**。

定理 6.6 自然数集 $\mathbf{N}$ 是无限集。

定理 6.7 非空集合 X 是无限集当且仅当存在从 $\mathbf{N}$ 到 X 的单射。

$N=\{0,1,2,\cdots\}$

↓ ↓ ↓ ↓ 双射

$\{x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n\}\subset X$

↓ 单射

X

可数集

N：无限集
N×N，Q：可数集
R：不可数集

定义 6.10 凡是与自然数集 N 等势的集合称为**可数集**。

任一可数集基数 $= card(N) = \aleph_0$

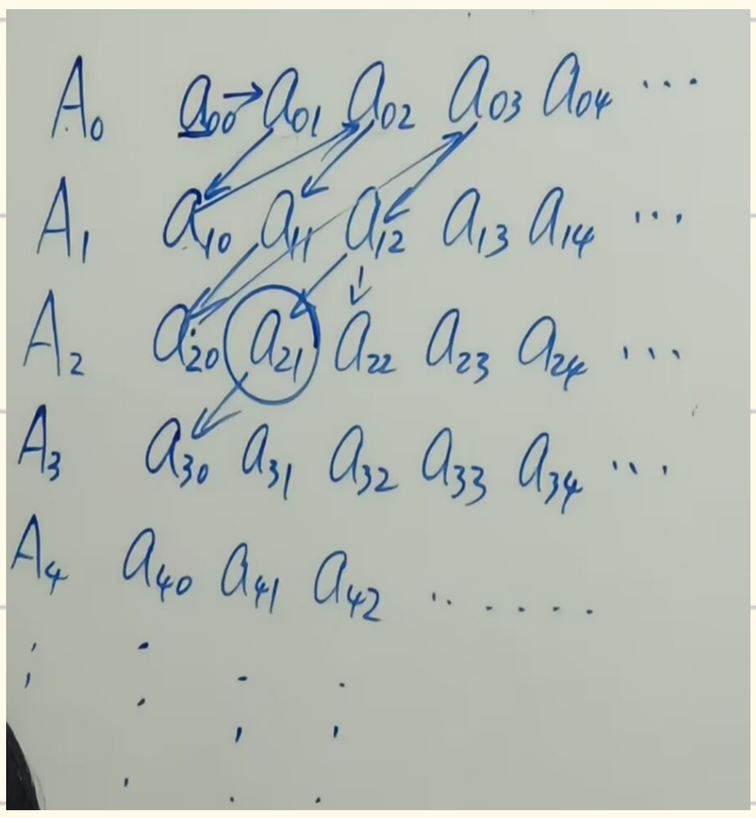
例如：令 $f: N \to Z$

$$\forall n \in N,\ f(n) = \begin{cases} \frac{n+1}{2}, & n\text{为奇} \\ -\frac{n}{2}, & n\text{为偶} \end{cases}$$

0 1 2 3 4 5 6 7
↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓
0 1 −1 2 −2 3 −3 4

定理 6.8 每个无限集必含有子集合为可数集。

定理 6.9 可数个可数集的并集仍然是可数集。



$$f: A = \bigcup_i A_i \to N$$

$$f(a_{mn}) = \frac{1}{2}(m+n)(m+n+1)+m$$

(对角线次序号)

推论：**⑦ N×N是可数集。**

设 $N \times N = A_0 \cup A_1 \cup A_2 \cup \cdots$，其中

$$A_i = \{(i,0), (i,1), (i,2), \cdots\}$$

⑧ 有理数集Q是可数集。

正有理数集 $a \in Q_+$，$a = q/p$

令 $f: Q_+ \to N \times N$ 的无限子集，$f(a) = (p, q)$

$Q_+ \sim N \times N \sim N$

同理，$Q_- \sim N$

故 $Q = Q_+ \cup Q_- \cup \{0\}$ 为可数集

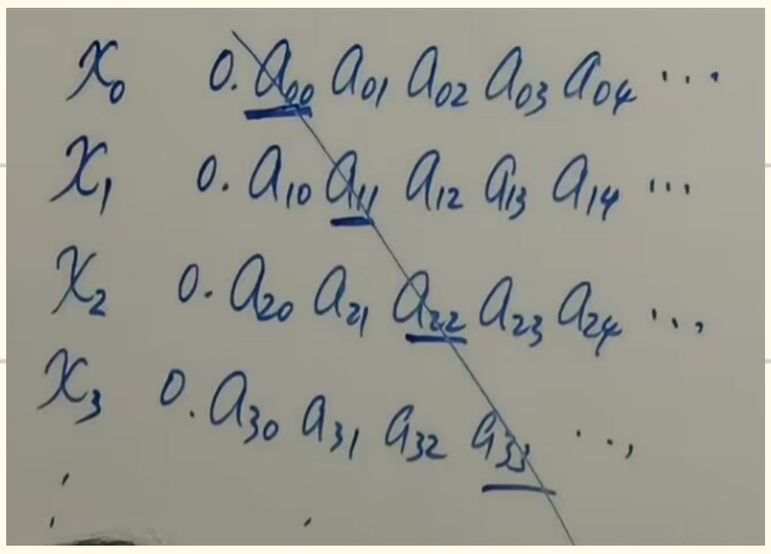
定理 6.11 实数集 **R** 不是可数集。

基数为 $\aleph_1$

$(0<1<2<3<\cdots<\aleph_0<\aleph_1)$

对角线法反证：

若R为可数集，$R\sim(0,1)$，对 $x_i\in R$



但对于 $X=0.b_1b_2b_3\cdots\cdots b_n\cdots\cdots$

其中 $b_i=\begin{cases}2, & a_{ii}\neq 2\\ 3, & a_{ii}=2\end{cases}$

发现X中的任一个数均不满足对角线条件

$X\neq x_i$，$i\in N$

$\Downarrow$

$X\in R$ 但 $X\in(0,1)\Rightarrow R\sim(0,1)$ 不成立

定理 6.12 设 M 为任一集合，S 是 M 的幂集合，那么 $\mathrm{card}(M)<\mathrm{card}(S)$。

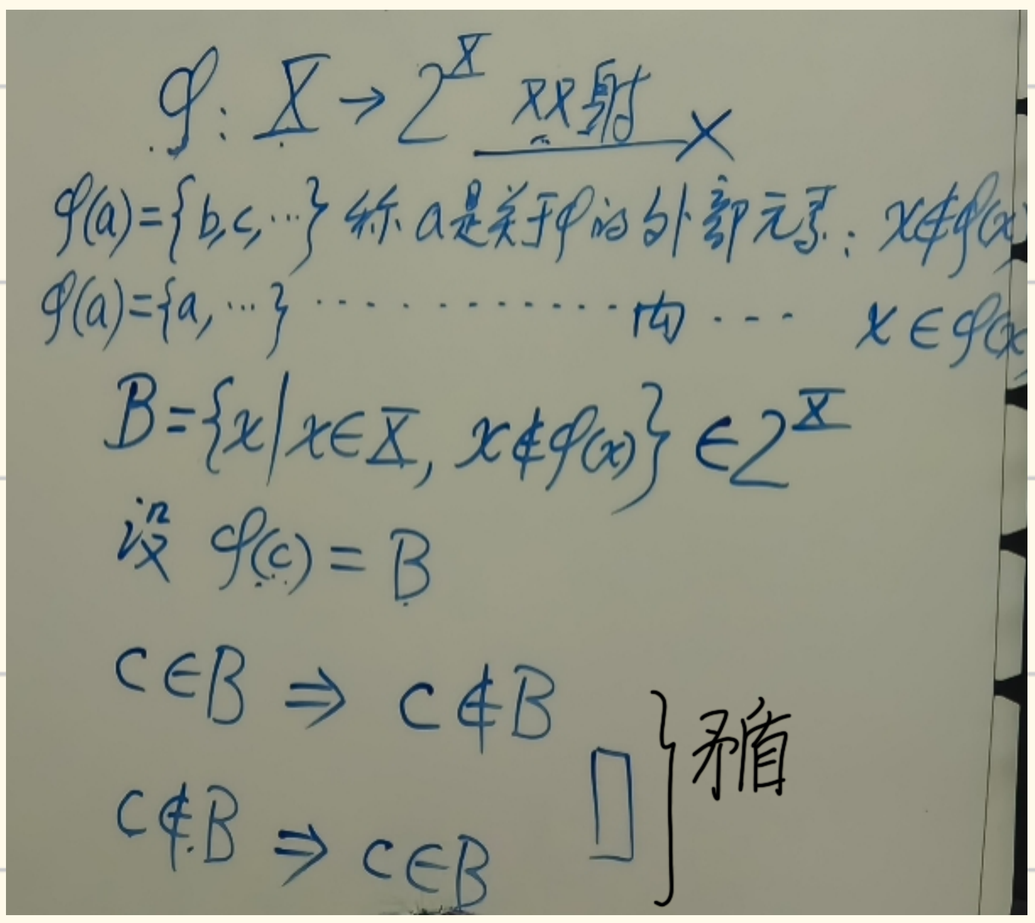
$A=\{a,b,c,\cdots\}$ $2^A=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\cdots\}$ 没有最大的基数

$\forall x\in A$，令 $f:A\to 2^A$，$f(x)=\{x\}$ 为单射

$\Rightarrow \mathrm{card}(A)\leqslant \mathrm{card}(2^A)$

下证等号不成立（反证法）：

假设 $\mathrm{card}(A)=\mathrm{card}(2^A)$，则存在 $\varphi:A\to 2^A$ 且 φ 为双射



Ch 6 习题集

2. 判别以下关系中哪些是全函数。

(1) $\{(n_1, n_2) \mid n_1, n_2 \in \mathbf{N}, 0<2n_1-n_2<5\}$

(2) $\{(n_1, n_2) \mid n_1, n_2 \in \mathbf{N}, n_2 \text{ 是 } n_1 \text{ 的正因子个数}\}$

(3) $\{(S_1, S_2) \mid S_1, S_2 \subseteq \{a, b, c, d\} \text{ 且 } S_1 \cap S_2 = \varnothing\}$

(1) $\frac{n_2}{2}<n_1<\frac{n_2}{2}+\frac{5}{2}$

$\{(1,1),(2,1)\}$不是单射

(2) 当$n_1=0$时，0个正因子个数不确定

(3) $\{(\{a\},\{b\}),(\{a\},\{c\}),(\{a\},\{d\})\}$不单值，不是函数

3. 在 3.1 节中已经定义了集合的特征函数。请利用集合 A 和 B 的特征函数 $\chi_A(x)$ 和 $\chi_B(x)$ 表示出 $A \cup B$，$A \cap B$，$A-B$，$\overline{A}$ 以及 $A \oplus B$ 对应的特征函数。

$$\chi_{A\cup B}(x)=1 \equiv \chi_A(x)+\chi_B(x)-\chi_A(x)\cdot\chi_B(x)=1$$

$$\chi_{A\oplus B}(x)=1 \equiv \chi_A(x)\cdot(1-\chi_B(x)) \vee (1-\chi_A(x))\cdot\chi_B(x)$$

$$\equiv \chi_A(x)\cdot(1-\chi_B(x))+(1-\chi_A(x))\cdot\chi_B(x)-\chi_A(x)\cdot\chi_B(x)\cdot(1-\chi_A(x))\cdot(1-\chi_B(x))$$

4. 试确定在含 n 个元素的集合上可以定义多少个二元关系，其中有多少个是全函数。

等价关系数 $\Leftrightarrow$ 分划数 $\not\Leftrightarrow$ 二元关系数

二元关系 $\subseteq A\times A \Rightarrow 2^{A\times A}$ 元素数 2^{n^2}

全函数(处处有定义) n^2

5. 设 $f: A\to B$，$C\subseteq A$。证明：$f(A)-f(C)\subseteq f(A-C)$。

$b\in f(A)-f(C) \Leftrightarrow b\in f(A)\wedge b\notin f(C) \Rightarrow (\exists x)[x\in A\wedge x\notin C\wedge f(x)=b]$

$\Leftrightarrow (\exists x)[x\in A-C\wedge f(x)=b] \Rightarrow b\in f(A-C)$

即证 $f(A)-f(C)$这个像集的元素一定在$f(A-C)$这个像集

6. 设 $f: X\to Y$，A 和 B 是 X 的子集。证明：

$$f(A\cup B)=f(A)\cup f(B),\ f(A\cap B)\subseteq f(A)\cap f(B)$$

设 $y\in f(A\cup B)$，$\exists x\in A\cup B$，$y=f(x) \Leftrightarrow \exists x[x\in A\vee x\in B]$

$\Leftrightarrow y=f(x)\in f(A)\cup f(B)$

故$f(A)=f(B)$

设$y\in f(A\cap B)$，$\exists x\in A\cap B$，$y=f(x) \Rightarrow \exists x[x\in A\wedge x\in B]$

$\Leftrightarrow y=f(x)\in f(A)\cap f(B)$

7. 确定下列映射是否单射、满射或双射：

(2) $f_2: \mathbf{N}\to\mathbf{N}$，$f_2(n)$ 为不超过 n 的素数数目

(3) $f_3: \mathbf{N}\times\mathbf{N}\to\mathbf{N}$，$f_3(n_1, n_2)=(n_1+1)^{n_2}$

(6) A 是集合，$f_6: 2^A\times 2^A\to 2^A\times 2^A$，$f_6(x, y)=(x\cup y, x\cap y)$

(2) $f_2(8)=\{2,3,5,7\}$ 4个 非单射

$f_2(9)=\{2,3,5,7\}$ 4个

(3) $f_3(n,0)=(n+1)^0\equiv 1$ 非单射 $f_3(n_1,n_2)=0$无解 非满射

(6) $f(x,y)=(x\cup y, x\cap y)=(y\cup x, y\cap x)=f(y,x)$ 非单射

$\varnothing\in 2^A$，$A\in 2^A$，但不存在x,y s.t. $f(x,y)=(\varnothing, A)$ 非满射

$f(x,y)=(x\cup y, x\cap y)=(\{a\},\{a,b\})$无解 非满射

8. 设 X 是有限集合，$f: X \to X$。证明：
(1) 如果 f 是单射时，f 必是双射。
(2) 如果 f 是满射时，f 必是双射。

(1) 假设 f 不为满射，则 $\exists x_0 \in X$，找不到 $x_0' \in X$，s.t. $f(x_0') = x_0$
由 $f: X \to X$，一定 $\exists x_1 \in X$，$x_2 \in X$，$x_1 \neq x_2$，s.t. $f(x_1) = f(x_2)$，与单射矛盾
$\Rightarrow f$ 为双射

(2) 假设 f 不为单射，则 $\exists x_1 \in X$，$x_2 \in X$，$x_1 \neq x_2$，s.t. $f(x_1) = f(x_2)$，由于 $f: X \to X$，
$\exists x_0 \in X$，找不到 $x_0' \in X$，$f(x_0') = x_0$，与满射矛盾
$\Rightarrow f$ 为双射

$f^2(x) = f \circ f(x)$ $[f(x)]^2 = f(x) \cdot f(x)$

9. 设 f 是有限集 X 上的一个函数，满足 $\forall x \in X$，$f^2(x) = x$。证明：f 是双射。

由于 $f^2(X) = X$，即 $f^2 = f \circ f = I_A$
而 $f \circ f^{-1} = I_A$，故 $f^{-1} = f$，逆函数存在
故 f 为双射

另解：设 $x \in X$，$y \in X$，若 $f(x) = f(y)$，则 $f^2(x) = f^2(y)$
即 $x = f^2(x) = f^2(y) = y$，$x = y$，$f(x)$ 为单射
又因 f 定义在有限集上，故 $f(x)$ 为双射

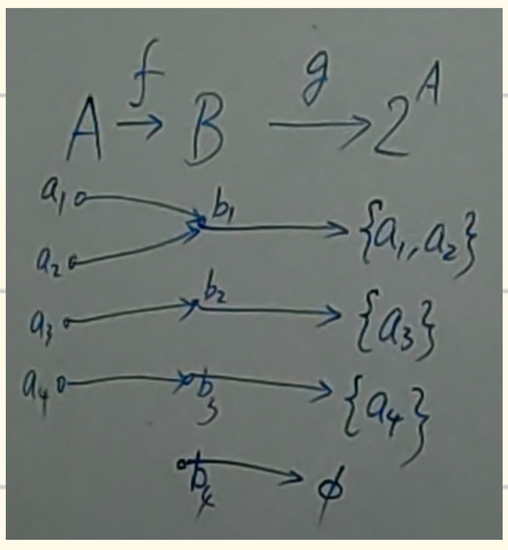
10. 设 $f: A \to B$，$g: B \to 2^A$，满足 $\forall b \in B$，$g(b) = \{x \in A \mid f(x) = b\}$。证明：当 f 为满射时 g 为单射。问 g 为单射时，f 是否必是满射？

g 为 f 的像源集合

f 为满射时，假设 g 不是单射，则 $\exists b_1, b_2 \in B$，$b_1 \neq b_2$，$g(b_1) = g(b_2)$，
则 $\exists a \in A$，s.t. $f(a) = b_1$ 且 $f(a) = b_2$ 违背函数的定义

另解：当 f 为满射时，若 $g(b_1) = g(b_2)$，则 $\forall x \in g(b_1)$，都有 $b_1 = f(x)$ 且 $b_2 = f(x)$，
即 $b_1 = b_2$，故 g 为单射

g 为单射，f 不为满射：



11. 设 A 和 B 都是有限集合，试确定 A 到 B 有多少个单射？多少个满射？多少个双射？

令 $m = |A|$，$n = |B|$，
若 $m > n$，从 A 到 B 无单射，满射 n^{m-n} 个 A_n^n $n! \cdot n^{m-n}$ 个，无双射

若 $m < n$，从 A 到 B 单射 A_m^m $m!$ 个，无满射，无双射

若 $m = n$，从 A 到 B 单射、满射、双射均为 $m!$ 或 $n!$ 个

16. 设 $A=\{1, 2, 3, 4\}$。

(1) 找出一个 A 上的非单位置换的置换 π，计算 $\pi\circ\pi=\pi^2$，$\pi^2\circ\pi=\pi^3$，以及 π^{-1}。

(2) 若 A 上置换 π 满足 $\pi\circ\pi=(1)$，称 π 为幂幺置换。求 A 上的全部幂幺置换。

$\pi\circ\pi=(1)\Rightarrow\pi=\pi^{-1}$

1-1-1-1：(1)

2-1-1：(1 2)，(1 3)，(1 4)，
(2 3)，(2 4)，(3 4)

3-1：不存在 $\pi=\pi^{-1}$

2-2：(1 2)(3 4)，(1 3)(2 4)，(1 4)(2 3)

4：不存在 $\pi=\pi^{-1}$

17. 计算有限集合 X 可以定义出多少个函数 f，使得 $f=f^{-1}$。

单位置换：1个

一个二元置换：$A_n^2/2$ [因(1 2)≡(2 1)，故需除2]

两个二元置换循环积：$A_n^2/(2\cdot A_2^2)$

……

$[\frac{n}{2}]$个二元置换循环积：$A_n^{[\frac{n}{2}]}/(2\cdot A_{[\frac{n}{2}]}^{[\frac{n}{2}]})$

18. 证明下列集合 A 和 B 等势。

(4) $A=\mathbf{N}$，$B=\{(m, n)\mid m, n\in\mathbf{N}\wedge m\leqslant n\}$

$B=B_0\cup B_1\cup B_2\cdots\cup B_i\cup\cdots$

其中 $B_i=\{(i,i),(i,i+1),(i,i+2),\cdots\}\subseteq N\times N$，$B_i$ 为可数集

由可数集并集仍为可数集，$B\sim N$

19. 设 $A\sim B$，$C\sim D$。证明：$A\times C\sim B\times D$。

由 $A\sim B$，$C\sim D$，存在双射 $f(x)$，$g(x)$，

s.t. $f(a)=b$，$g(c)=d$

令 $F(a,c)=(f(a),g(c))$，$F: A\times C\to B\times D$，

由 $a_1\neq a_2$ 时，$f(a_1)\neq f(a_2)$，$c_1\neq c_2$ 时，$g(c_1)\neq g(c_2)$

故 $(a_1,c_1)\neq(a_2,c_2)$ 时，$F(a_1,c_1)\neq F(a_2,c_2)$，即 F 为单射

由 $\forall b\in B$，$\exists a\in A$，s.t. $f(a)=b$，$\forall d\in D$，$\exists c\in C$，s.t. $f(c)=d$，

故 $\forall(b,d)\in B\times D$，$\exists(a,c)\in A\times C$，s.t. $F(a,c)=(b,d)$，即 F 为满射

$\Rightarrow F$ 为双射，$A\times C\sim B\times D$

20. 证明：非空有限集 A 与可数集 B 的笛卡儿积 $A\times B$ 也是可数集。

$A\sim\{1,2,3,\cdots,|A|\}$，$B\sim N$

$A\times B\sim\{1,2,3,\cdots,|A|\}\times N=\underbrace{\{(1,1),(1,2),\cdots\}}_{\sim N}\cup\underbrace{\{(2,1),(2,2),\cdots\}}_{\sim N}\cup\cdots$

可数集并集仍 $A\times B\sim N$

第10章 图的基本概念

无向简单图

定义 10.1 一个（无向）图 G 是一个二元组 $(V(G), E(G))$，其中 $V(G)$ 是一个有限的非空集合，其元素称为**结点**；$E(G)$ 是一个以不同结点的无序对为元素且不含重复元素的集合，其元素称为**边**。

称 $V(G)$ 和 $E(G)$ 分别是 G 的**结点集**和**边集**。

与结点u和v相联系的边e_i记为无序对uv或vu

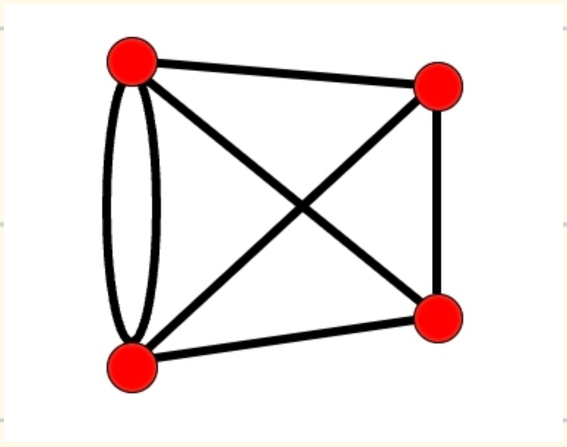
图G节点数为图的阶，边数用ε表示，

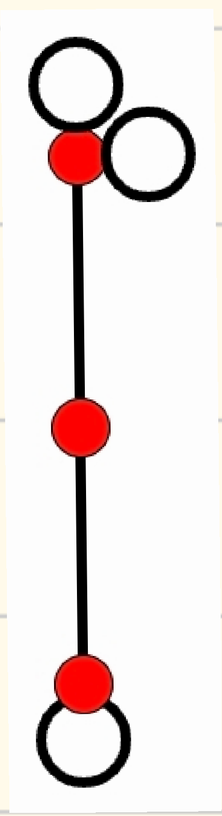
m个节点，n条边的图简记为(m,n)

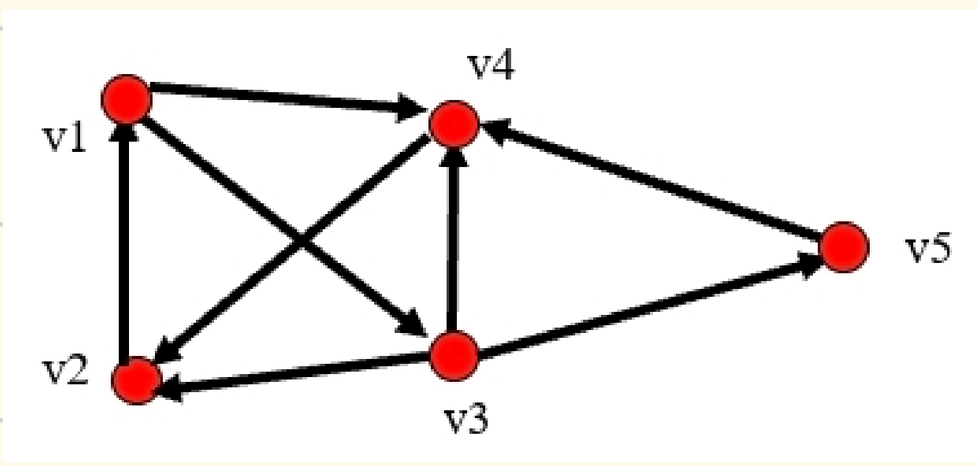
令邻接：①若$e=uv$是G的一条边，则u与v是邻接的

②若边e_1, e_2与结点u关联，则e_1, e_2是邻接的

多重图(平行边)　　广义图(环)　　有向图







$u \xrightarrow{e} v$

$e=(u,v)$

e为u的入边，v的出边

节点度

定义 10.2 图 G 中结点 u 的度（简称**点度**）$d_G(u)$ 是 G 中与 u 关联的边的条数，每个环在计算度时算作两条边。

在图 G 中，最大的点度和最小的点度分别记为 Δ_G 和 δ_G，在不引起混淆的情况下，$d_G(u)$，Δ_G，δ_G 分别简写为 $d(u)$，Δ 和 δ。

图论基本定理

定理 10.1 握手定理 对于任何 (n, m) 图 $G=(V, E)$ 有

$$\sum_{u \in V} d(u) = 2m$$

推论：

推论 10.1.1 在任何图中，奇数度的结点数必是偶数。

(如度为(5,4,2,3,1)的图不存在)　　无环图(n,m)必存在 $m \leq n-1$

定义 10.3 在有向图 G 中，结点 u 的**入度** $d^-(u)$ 是与 u 关联的入边的数目，**出度** $d^+(u)$ 是 u 的出边的数目。

有向图的最大出度、最大入度、最小出度、最小入度分别记为 Δ^+，Δ^-，δ^+，δ^-。

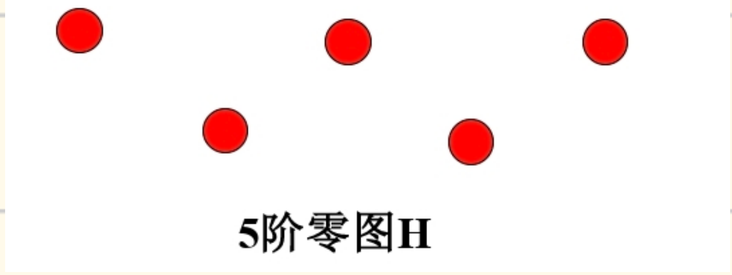
定理 10.2 对于任何 (n, m) 有向图 $G=(V, E)$，

$$\sum_{u\in V} d^+(u) + \sum_{u\in V} d^-(u) = 2m$$

且

$$\sum_{u\in V} d^+(u) = \sum_{u\in V} d^-(u) = m$$

零图($\Delta=0$)　　平凡图(一阶零图)

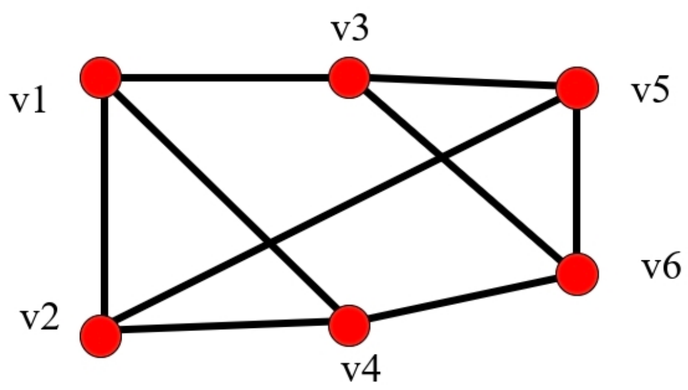


5阶零图H

平凡图G

图中度为 0 的结点称为**孤立结点**。只由孤立结点构成的图 $G=(V, \varnothing)$ 称为**零图**。特别地，只由一个孤立结点构成的图称为**平凡图**。

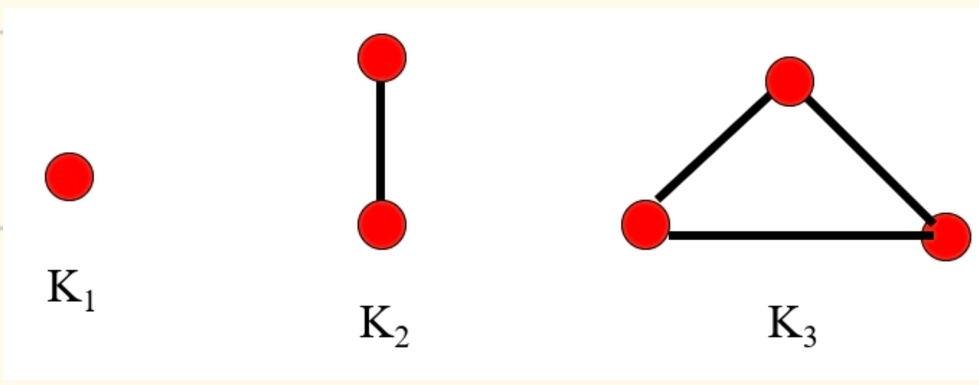
k度正则图(d(Vi)相同)



6阶的3度正则图

各点度相等的图称为**正则图**。特别地，点度为 k 的正则图又称为**k 度正则图**。显然，零图是零正则图。

完全图Kn

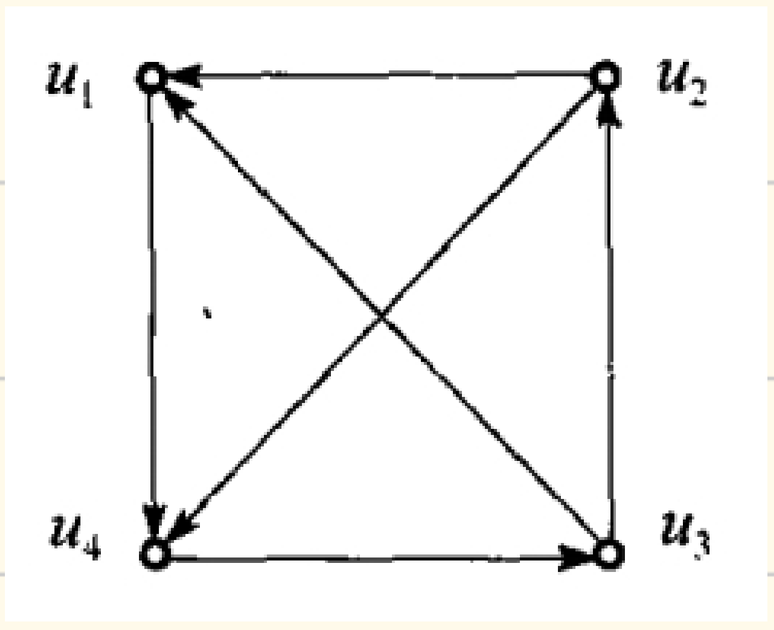


Kn的边数 $\varepsilon = C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$

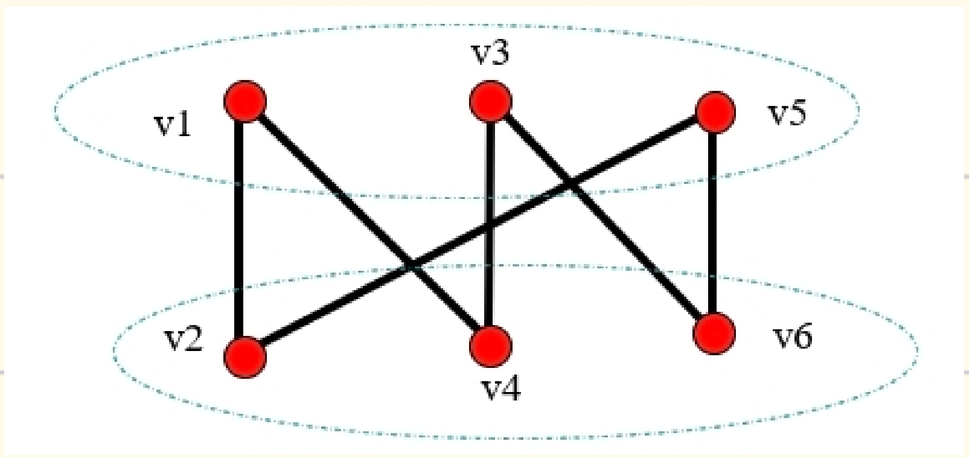
点度 $d(V_i) \equiv n-1$

任何两个结点皆相互邻接的简单图称为**完全图**。容易证明，n 阶的完全图是 $(n, n(n-1)/2)$ 图，特别记为 K_n。图 10-6 是常用的几个完全图。显然，K_n 是 $(n-1)$ 度正则图。

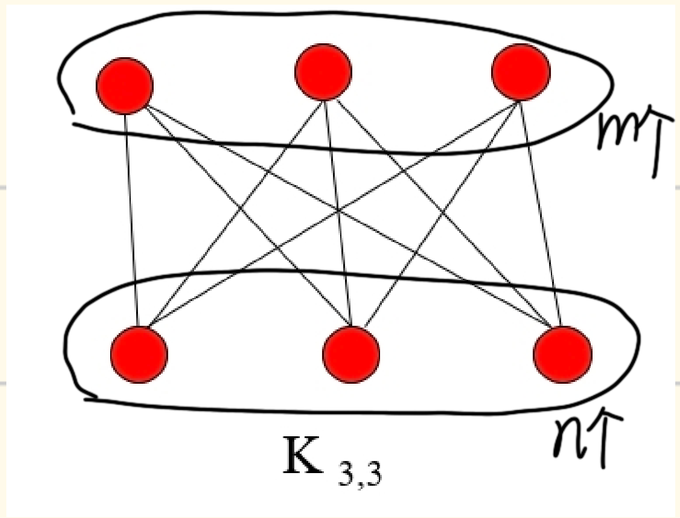
竞赛图(n阶有向完全图)



二部图



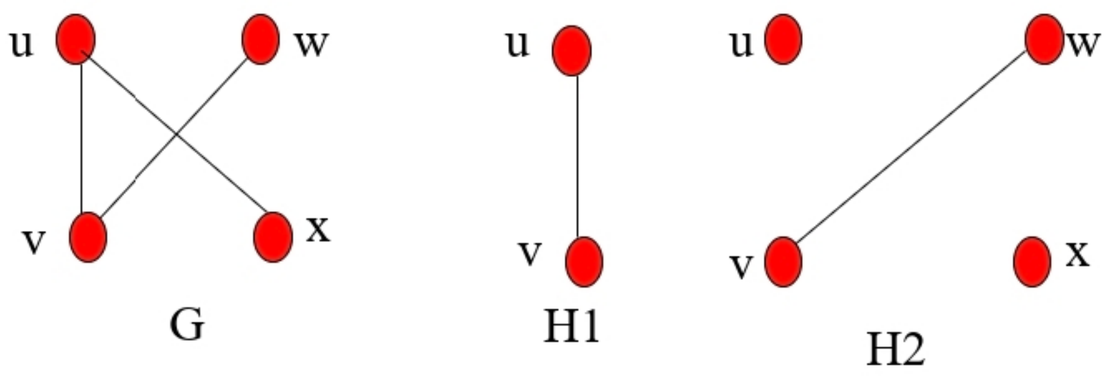
完全二部图 $K_{m,n}$



$E=m\cdot n$

二部图 $G=(V,E)$ 的结点集可以分划成两个子集 X 和 Y，使得它的每一条边的一个关联结点在 X 中，另一个关联结点在 Y 中，因此又常说 G 是具有二部分划 (X,Y) 的图。设 $|X|=n_1$，$|Y|=n_2$。如果 X 中每个结点与 Y 中的全部结点都邻接，则称 G 为**完全二部图**，记为 K_{n_1,n_2}。

子图 生成子图(点全保留)

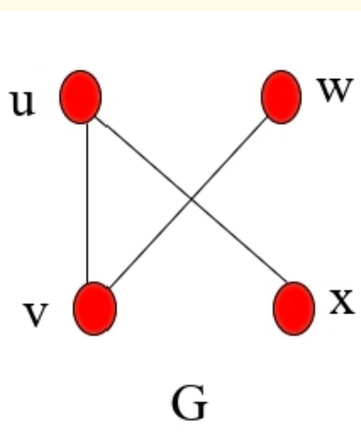


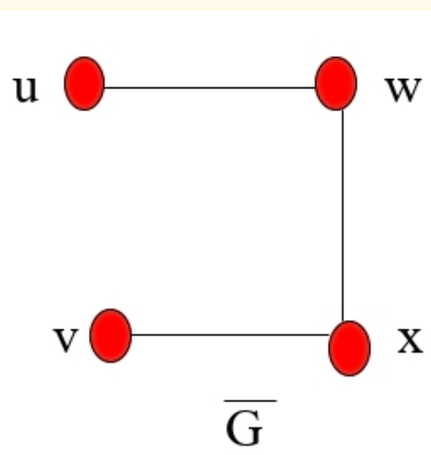
定义 10.4 设 $G=(V_1,E_1)$ 和 $H=(V_2,E_2)$ 是两个图，若满足 $V_2\subseteq V_1$ 且 $E_2\subseteq E_1$，则称 H 是 G 的**子图**。特别地，当 $V_2=V_1$ 时，称 H 是 G 的**生成子图**；当 $E_2\subset E_1$ 或 $V_2\subset V_1$ 时，称 H 是 G 的**真子图**；当 $V_2=V_1$ 且 $E_2=E_1$ 或 $E_2=\varnothing$ 时，称 H 是 G 的**平凡子图**。

产生子图的途径

- 删去
  - 删顶点子图(同时删关联边)
  - 删边子图
- 诱导
  - 点诱导子图
  - 边诱导子图

补图($\overline{G}=K_n-G$，点不变边取补)





定义 10.5 设 $G=(V,E)$ 和 $G'=(V',E')$ 是两个简单图。若

$$V'=V, E'=\{uv \mid v,u\in V, uv\notin E\}$$

即边 $uv\in E'$ 当且仅当 $uv\notin E$，则称 G' 是 G 的**补图**。

同构

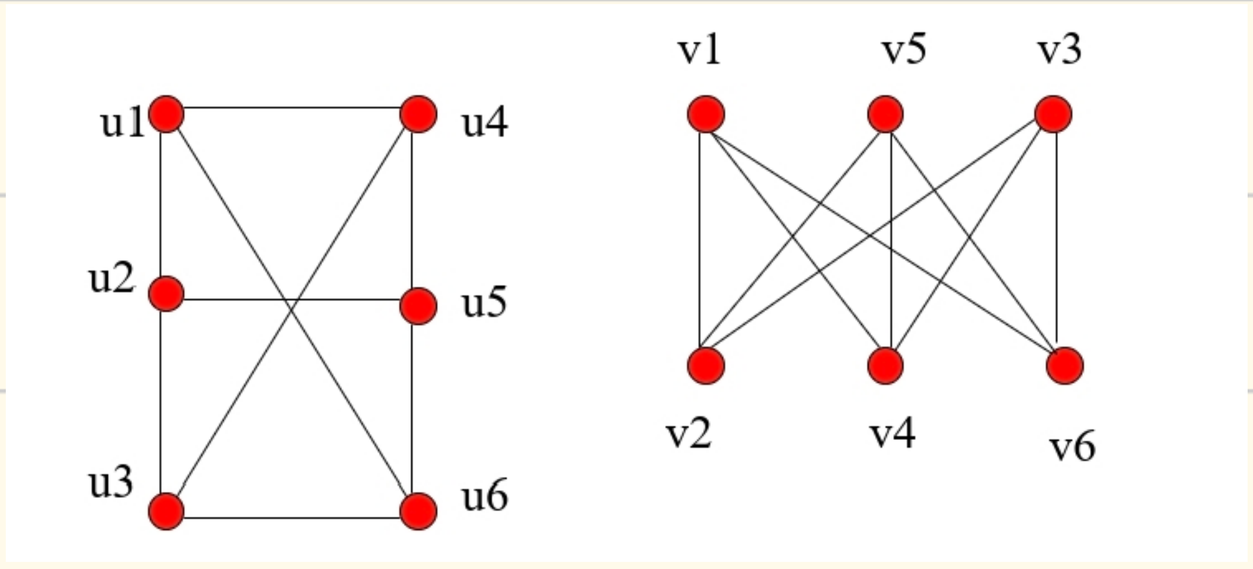
定义 10.6 设 $G=(V, E)$ 和 $G'=(V', E')$ 是两个图，如果存在双射 $\varphi: V \to V'$，使

$$uv \in E \Leftrightarrow \varphi(u)\varphi(v) \in E'$$

则称 G 和 G' **同构**，记为 $G \cong G'$。

同构图具有相同结点数、边数、对应节点度

同构是图上的等价关系



φ：

$u_1 \to v_3$（任选一个）

$u_2 \to v_2$（任选一个，并验证 $u_2 \leftrightarrow u_1$ 邻接关系）

$u_3 \to v_5$（任选一个，并验证 $u_5 \leftrightarrow u_1$，$u_3 \leftrightarrow u_2$ 邻接关系）

$u_4 \to v_6$（…）

$u_5 \to v_1$（…）

$u_6 \to v_4$（…）

无向图的道路

定义 10.8 图（或有向图）$G=(V, E)$ 中的非空序列 $P=v_0 e_1 v_1 e_2 \cdots e_k v_k$ 称为 G 的一条由结点 v_0 到 v_k 的**道路**（或**有向道路**），其中 v_0，v_1，…，v_k 是 G 的**结点**，e_1，…，e_k 是 G 的**边**（或**有向边**），并且对所有的 $1 \leqslant i \leqslant k$，边 e_i 与结点 v_{i-1} 和 v_i 都**关联**（或 e_i 是由 v_{i-1} 指向 v_i 的有向边）。

v_0 称为道路 P 的**起点**，v_k 称为 P 的**终点**，其余结点称为**内部结点**。P 中边的数目 k 称为该道路的**长度**。以 u 为起点，v 为终点的道路有时也简记为 $\langle u, v \rangle$ 道路。

对于由单个结点构成的序列 $P=v_0$，看成是道路的特殊情形，称为**零道路**，其长度为 0。

道路的分类

迹（任何道路）

↓

简单道路（边不重复出现）

↓

基本道路（结点不重复出现）

回路的分类

回路

↓

简单回路（边不重复出现）

↓

圈（结点不重复出现）

定理 10.3 如果在 n 阶图中，存在从结点 u 到 v 的道路，则必存在从 u 到 v 的长度不超过 $n-1$ 的道路。

无向图的连通性

结点的连通

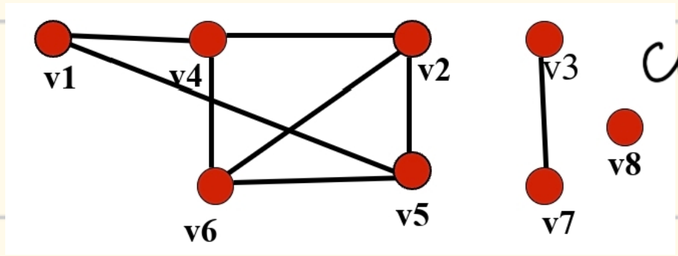
1。定义：如果存在从结点u到结点v的道路，则称u到v是连通的。

结点集V上连通：自反、对称、传递 $\Longrightarrow$ 等价关系

图的连通

2。如果图G中任何两个结点都是连通的，则称G是连通图。

n阶连通图至少有n-1条边

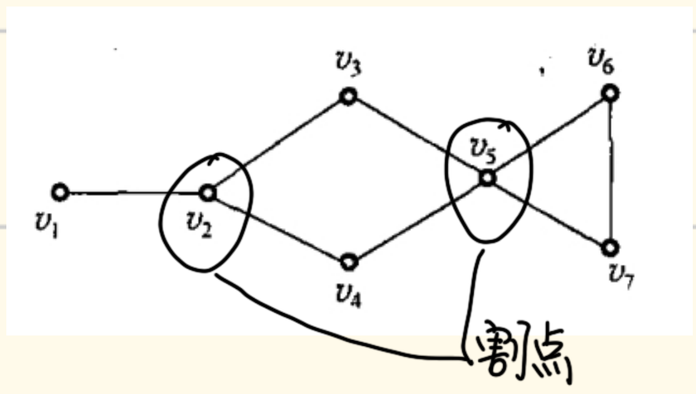


$\omega(G)=3$

点割集

定义 10.12 设 $G=(V, E)$ 是连通图。若存在 $S \subseteq V$，使 $\omega(G-S)>1$，则称 S 是 G 的一个**点割集**（简称**割集**）；若对任何 $S' \subset S$ 都有 $\omega(G-S')=1$，则称 S 为 G 的一个**基本割集**。特别地，当 $\{u\}$ 是 G 的割集时，称 u 是 G 的**割点**。

定理 10.4 在非平凡连通图 G 中，结点 v 为 G 的割点的充要条件是存在结点 u 和 w，使 u 到 w 的每一条道路都包含 v 结点。



基本点割集：$\{V_2\}, \{V_3, V_4\}, \{V_5\}$

边割集

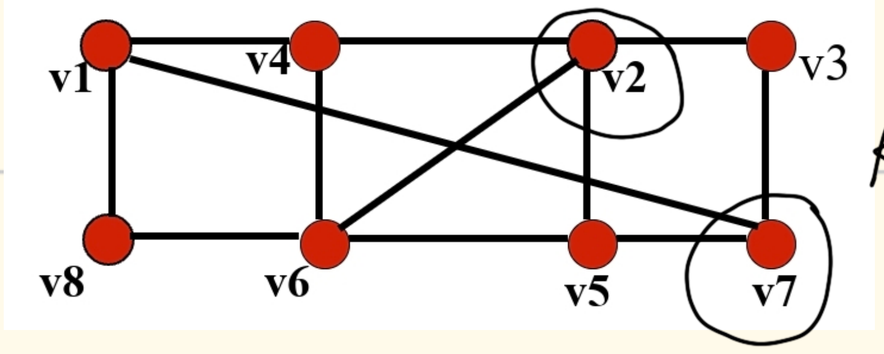
定义 10.13 设 $G=(V, E)$ 是连通图。如果存在 $E_1 \subseteq E$，使 $\omega(G-E_1)>1$，则称 E_1 为 G 的一个**边割集**；如果对任何 $E' \subset E_1$ 都导出 $\omega(G-E')=1$，则称 E_1 为 G 的一个**基本边割集**。特别地，如果 $\{e\}$ 是 G 的边割集，则称 e 为 G 的**割边**。

定理 10.5 在连通图 G 中，边 e 为割边的充要条件是 e 不包含于 G 的任何圈中。

无环图的连通度

定义 10.14 图 G 的**点连通度** $\kappa(G)$ 是使由 G 产生一个非连通子图，或一个结点的子图所需要删去的最少的结点的数目。

$$K(G)=\begin{cases}\text{最小的基本点割集的基数}, & G \neq K_n \\ n-1, & G=K_n\end{cases}$$



$K(G)=2$

定义 10.15 图 G 的**边连通度** $\lambda(G)$，是使由 G 产生一个非连通图所需要删去的最少的边的数目；如果 G 只有一个结点，则 $\lambda(G)=0$。

$$\lambda(G)=\begin{cases}\text{最小的边割集的基数}, & others \\ 0, & G=K_1 \\ n-1, & G=K_n\end{cases}$$

定理 10.6 对于任何图 G，$\kappa(G) \leqslant \lambda(G) \leqslant \delta$。

有向图的道路

1。定义：如果图G中由结点和边交替构成的序列 $p=v_0e_1v_1e_2v_2...e_kv_k$，满足其中每条 e_i 是 v_{i-1}的出边和 v_i 的入边，则称 p为由 v_0到 v_k 的一条有向道路。

有向迹　　有向回路
有向简单道路　　有向简单回路
有向基本道路　　有向圈

有向图的连通

定义 10.9　若图 G 中结点 u 和 v 之间存在一条 $P<u,v>$道路，则称 u 和 v 在 G 中是**连通的**。在有向图中，若存在 $P<u,v>$有向道路，则称 u 到 v 是**有向连通的**，或称为 u **可达于** v。

可达、自反、可传递

定义 10.16　设 $G=(V, E)$ 是一个简单有向图。如果对 G 中任何一对结点，至少从其中一结点到另一结点是可达的，则称 G 是**单向连通图**；如果任何两个结点之间都是相互可达的，则称 G 是**强连通图**；如果 G 的基图是连通的，则称 G 是**弱连通图**。

强连通的性质

定理 10.7　一个简单有向图是强连通的，当且仅当 G 中有一条包含每个结点的有向闭道路。

定义 10.17　设 $G=(V, E)$ 是一个简单有向图，称 G 的极大强连通子图为 G 的**强分图**

定理 10.8　在简单有向图 $G=(V, E)$ 中，每个结点位于且仅位于一个强分图中。

相互可达是结点集 V 上的一个等价关系，它导致产生 V 的一个划分 $\{V_1, V_2, \cdots,\}$
(都为G的强分图)

图的邻接矩阵表示

定义 10.18　设 $G=(V, E)$ 是一个简单有向图，结点集为 $V=\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ 构造矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，其中

$$a_{ij}=\begin{cases}1 & \text{当}(V_i,V_j)\in E\\ 0 & \text{当}(V_i,V_j)\notin E\end{cases}$$

则称 $\boldsymbol{A}$ 为有向图 G 的**邻接矩阵**。

性质

① 第 i 行之和是结点 v_i 的出度，第 j 列之和是结点 v_j 的入度。

② **定理 10.9**　设 $G=(V, E)$ 是一个 n 阶的简单有向图，$\boldsymbol{A}$ 是 G 的邻接矩阵。对 $k\geqslant 1$，令 $\boldsymbol{A}^k=(a_{ij}^{(k)})_{n\times n}$，则 $a_{ij}^{(k)}$ 表示 G 中从 v_i 到 v_j 的长度为 k 的有向道路的数目。

图的可达矩阵表示

定义 10.19　设 $G=(V, E)$ 是一个 n 阶的有向简单图，$V=\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$，定义矩阵 $\boldsymbol{P}=(p_{ij})_{n\times n}$，其中

$$p_{ij}=\begin{cases}1 & \text{从 } v_i \text{ 到 } v_j \text{ 存在非零的有向道路}\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

称 $\boldsymbol{P}$ 是图 G 的**可达性矩阵**（或称**道路矩阵**）。

求可达矩阵的方法

①

求可达性矩阵，可以先构造 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{A}^2$，…，$\boldsymbol{A}^n$，再构造 $\boldsymbol{B}_n=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2+\cdots+\boldsymbol{A}^n$，最后利用关系

$$p_{ij}=\begin{cases}1 & \text{若 } b_{ij}^{(n)}>0\\ 0 & \text{若 } b_{ij}^{(n)}=0\end{cases}$$

确定 $\boldsymbol{P}$ 的元素 p_{ij} 从而构造出 $\boldsymbol{P}$。

② P=Warshall算法求A的传递闭包

可达矩阵构造强分图

设 $\boldsymbol{P}=(p_{ij})_{n\times n}$ 是有向图 G 的可达性矩阵。定义矩阵 $\boldsymbol{P}\odot\boldsymbol{P}^T=(g_{ij})_{n\times n}$ 如下：

$$g_{ij}=\begin{cases}1 & \text{当 } i=j\\ p_{ij}\wedge p_{ji} & \text{当 } i\neq j\end{cases}$$

邻接矩阵 —Warshall→ 可达矩阵 → P⊙P^T

eg.

$$\boldsymbol{P}\odot\boldsymbol{P}^T=\begin{pmatrix}1&1&1&1&0&0\\1&1&1&1&0&0\\1&1&1&1&0&0\\1&1&1&1&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

图的关联矩阵表示

定义 10.20 设 $G=(V,E)$ 是一个无环的、至少有一条有向边的有向图，

$$V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\},E=\{e_1,e_2,\cdots,e_m\}$$

构造矩阵 $\boldsymbol{M}=(m_{ij})_{n\times m}$，其中

$$m_{ij}=\begin{cases}1 & \text{当 } e_j \text{ 是 } v_i \text{ 的出边}\\ -1 & \text{当 } e_j \text{ 是 } v_i \text{ 的入边}\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

称 $\boldsymbol{M}$ 是 G 的**关联矩阵**。

性质

1）第 i 行中 1 的个数是 v_i 的出度，-1 的个数是 v_i 的入度。

2）矩阵中每列都有且仅有一个 1 和一个 -1。

eg.

$$\boldsymbol{M}=\begin{array}{c}\\v_1\\v_2\\v_3\\v_4\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccccccc}e_1&e_2&e_3&e_4&e_5&e_6&e_7\end{array}\\\begin{pmatrix}1&1&-1&1&0&0&0\\-1&0&0&0&1&1&0\\0&0&0&-1&0&-1&1\\0&-1&1&0&-1&0&-1\end{pmatrix}\end{array}$$

Ch 10 习题集

2. 设 G 是一个 $(n, n+1)$ 的无向图。证明：G 中存在顶点 u，$d(u) \geqslant 3$。

假设每个点 $d(u)<3$，即 $d(u) \leq 2$ 整数

边数 $n+1=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} d(u_i) \leqslant \frac{2n}{2}=n$，不成立，

故存在顶点 u，$d(u) \geq 3$

4. 证明：在 (n, m) 图中 $\delta \leqslant \frac{2m}{n} \leqslant \Delta$。

由于 $\sum_{i}^{n} d(u_i)=2m$ 平均点度

故平均点度为 $\frac{2m}{n}$

又因 δ 为最小点度，Δ 为最大点度

$\delta < \frac{2m}{n} < \Delta$

6. 设 G 是 (n, m) 简单二部图。证明：$m \leqslant \frac{n^2}{4}$。

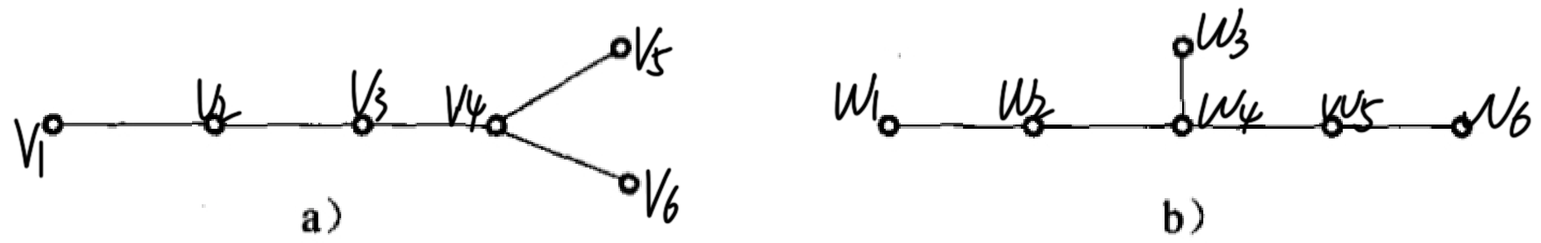
(n,m) 二部图，对 n 节点的完全二部图，一侧的每个节点都连接对侧所有节点（$\frac{n}{2}$ 个），即 $m_0=\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}=\frac{n^2}{4}$

$m \leqslant m_0=\frac{n^2}{4}$

设两部分点数为 k，$n-k$

$m=k\cdot(n-k)=\frac{n^2}{4}-(k-\frac{n}{2})^2 \leqslant \frac{n^2}{4}$

10. 判断图 10-29 中的两个图是否同构，并说明理由。



设 $F: Ga \to Gb$，即 $F: V_1 \to W_1$

$V_2 \to W_2$

$V_3 \to W_4$

$V_4 \to W_3$

$V_5 \to X$ 不存在双射 F，故 $Ga \ncong Gb$

16. 证明：G 是二部图当且仅当 G 的回路都是偶长回路。

若 G 为二部图，设节点集分别为 V_1，V_2，从 $u_0 \in V_1$ 出发的道路只能到达 $u_1 \in V_2$，又到达 $u_3 \in V_1$，即回到同侧节点必为偶长道路，构成回路也必为偶长道路

若G的回路为偶长道路，记到V_i最短路为偶E集奇O集，若$\forall u_i, u_j \in E$有通路，则$V_1 \overset{偶}{\cdots} u_i u_j \cdots V_1$偶 ⇒奇长道路，故$u_i, u_j$必无道路，对O也同理，故G为二部图

19. 设 $G=(V, E)$ 是点度均为偶数的连通图。证明：对任何 $v \in V$，$\omega(G-v) \leqslant 1/2 d(v)$。

G-V中，奇数点度个数为 $d(V)$

$\sum d(u)$必为偶⇒奇数度点必成对存在于同一连通子图

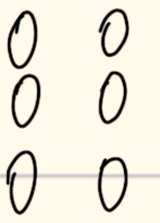
$\omega(G-V) \leq \frac{d(u)}{2}$

证明δ >1的图必含回路，反之成立吗？

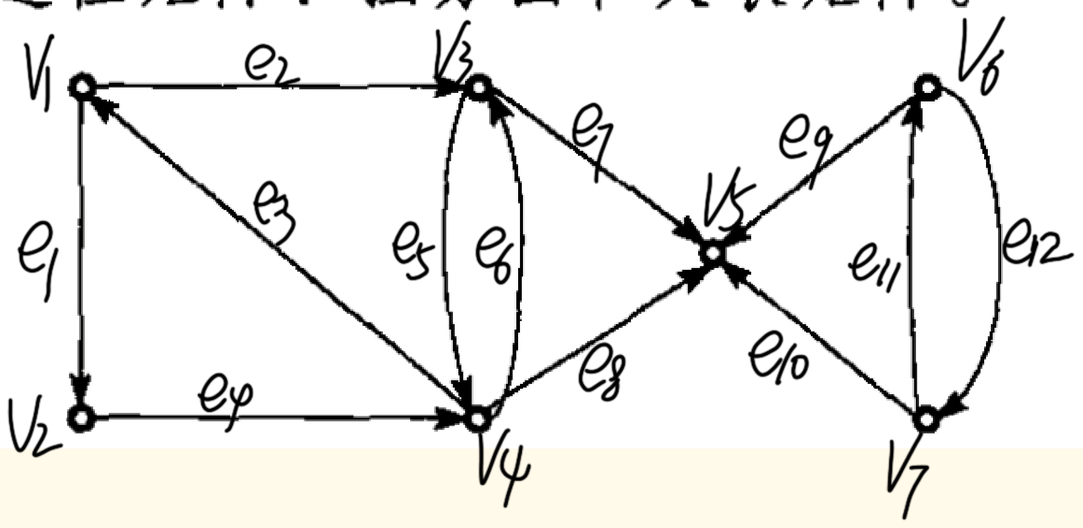
$\delta > 1$，$\sum_{u_i \in V} d(u_i) \geq 2n$

而无环图 $\sum_{u_i \in V} d(u_i) = 2m \leq 2(n-1)$

故必含回路

反之不成立  $\delta = 1$

30. 求图 10-34 的邻接矩阵、可达性矩阵、强分图和关联矩阵。



邻接 $A=\begin{bmatrix} 0&1&1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&1&1&0&1 \\ 1&0&1&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0&1 \\ 0&0&0&0&1&1&0 \end{bmatrix}$

可达 $G=\begin{bmatrix} 1&1&1&1&1&1&1 \\ 1&1&1&1&1&1&1 \\ 1&1&1&1&1&1&1 \\ 1&1&1&1&1&1&1 \\ 0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1&1&1 \\ 0&0&0&0&1&1&1 \end{bmatrix}$

$GOG^T=\begin{bmatrix} 1&1&1&1&0&0&0 \\ 1&1&1&1&0&0&0 \\ 1&1&1&1&0&0&0 \\ 1&1&1&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1&1 \\ 0&0&0&0&0&1&1 \end{bmatrix}$

关联 $M=$

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}
V_1	1	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
V_2	-1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
V_3	0	-1	0	0	1	-1	1	0	0	0	0	0
V_4	0	0	1	-1	-1	1	0	1	0	0	0	0
V_5	0	0	0	0	0	0	-1	-1	-1	-1	0	0
V_6	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	-1	1
V_7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	-1

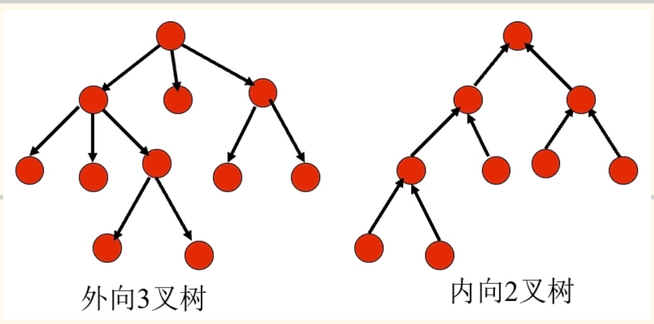
第11章 树及其应用

定义 11.1 连通的且不含圈的图称为**树**。

树中度为 1 的结点称为**叶**，度大于 1 的结点称为**枝点**或**内点**。

只含一个结点的树称为平凡树。

根树



树的等价定义

定理 11.1 设 T 是非平凡的图，则下述命题相互等价：

①T 连通且无圈。

②T 无圈且 $m=n-1$。

③T 连通且 $m=n-1$。

④T 无圈，但新增加任何一条边（端点属于 T）后有且仅有一个圈。

⑤T 连通，但是删去任何一边后便不再连通。（任一边均为割边）

⑥T 的每一对结点之间有且仅有一条道路可通。（任一枝点均为割点）

推论 11.1.1 任何非平凡树至少有 2 个叶。

证明：$\begin{cases} \sum d(v_i) \geqslant t+2(n-t) & (t\text{个叶}) \\ \sum d(v_i) = 2m \\ m = n-1 \end{cases}$

$\Rightarrow t \geqslant 2$

生成树

定义 11.2 如果连通图 G 的生成子图是一个树，则称这个树为 G 的**生成树**。

定理 11.2 每个连通图都含有生成树。

设T是连通图G的一个生成树，e是G的一条边。

如果e在T中，则称之为树边，否则称之为树补边。

(n,m)连通图有$n-1$个树边，$m-n+1$个树补边

连通图G的任何边割集至少含一条树边

G的任何回路至少含一条树补边

证明要点：

如果一个边割集F不含任何树边。则G-F仍有生成树。

如果一个回路C不含任何树补边，则T中含有回路C。

最小生成树

Kruskal算法

①选取 G 中权最小的一条边，设为 e_1，令 $S=\{e_1\}$，$i=1$。

②如果 $i=n-1$，输出 $G(S)$，算法结束。

③设已选边构成集合 $S=\{e_1, e_2, \cdots, e_i\}$，从 $E-S$ 中选边 e_{i+1}，使其满足条件：

1) $G(S\cup\{e_{i+1}\})$ 不含圈。

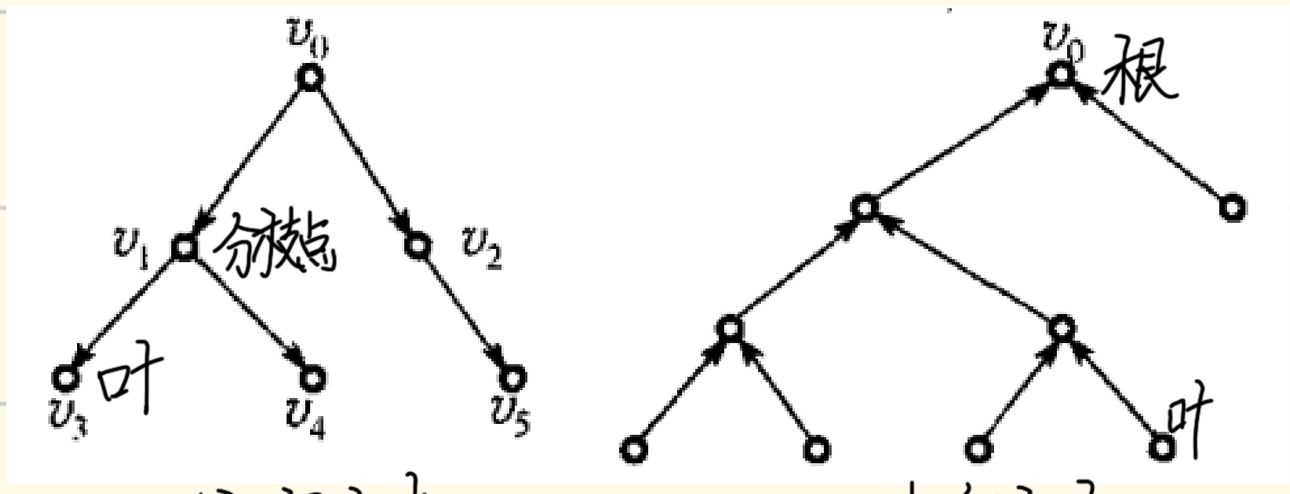
2) 在 $E-S$ 的所有满足条件 1) 的边中，e_{i+1} 有最小的权。

④$S=S\cup\{e_{i+1}\}$，$i=i+1$，转②。

一个连通权图的最小生成树可以不唯一。

根树

定义 11.3 如果一个有向图 G 的基图是树，则称 G 为**有向树**。

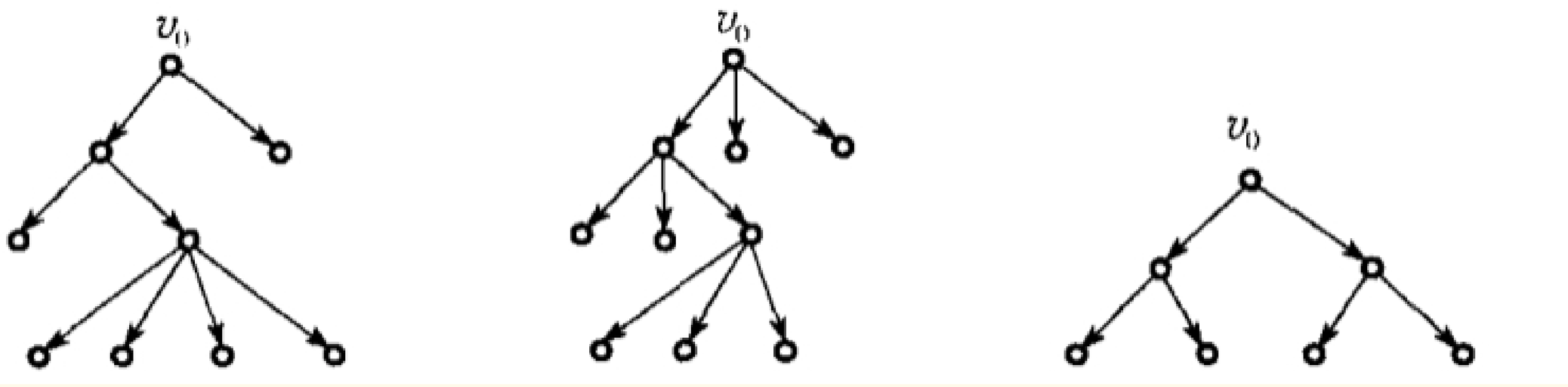


外向树　　内向树

定义 11.4 设 T 是一个有向树。如果 T 恰有一个入度为 0 的结点 v，其余结点的入度皆为 1，则称 T 是以 v 为根的**外向树**。外向树中出度为 0 的结点称为**叶**，出度不为 0 的点称为**分枝点**。

同样，如果有向树 T 恰有一个出度为 0 的结点，其余结点出度皆为 1，则称 T 是以 v 为根的**内向树**。在内向树中出度为 0 的结点称为**根**，入度为 0 的结点称为**叶**，入度不为 0 的结点称为**分枝点**。

在有序树中以结点 v 为根的子根树，就是由 v 及其全部后裔所构成的**诱导子图**。



四叉树　　完全三叉树　　正则二叉树

定义 11.5 在根树（外向树）T 中，如果任何结点的出度最多为 m，则称 T 为 **m 叉树**；如果每个分枝结点的出度都等于 m，则称 T 为**完全 m 叉树**；进一步，若 T 的全部叶点位于同一层次，则称 T 为**正则 m 叉树**。

定理 11.5 若 T 是完全 m 叉树，其叶数为 t，分枝点数为 i，则 $(m-1)i=t-1$。

定义 11.6 在根树中，一个结点的道路长度定义为根到这个结点的距离。根树的高度定义为树中最大的结点道路长度。

定理 11.6 在一个分枝点数目为 i 的完全二叉树中，设 I 表示各分枝点道路长度之和，J 表示各叶的道路长度之和，则 $J=I+2i$。

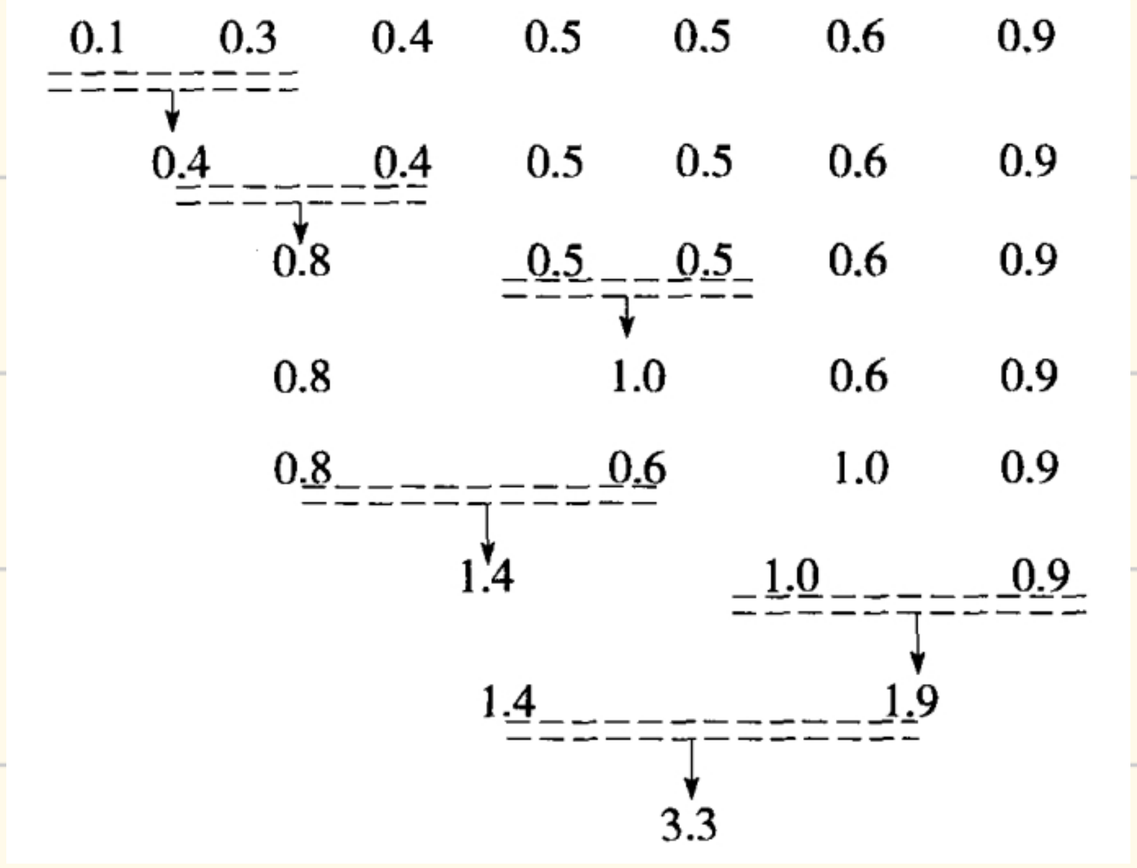
外部通道长度之和　　内部通道长度之和

显然，以 w_1，w_2，…，w_t 为叶的权而构造的二叉树可能有很多个，我们希望确定在所有的这种带权的二叉树中，使 $W(T)$ 取最小值的 T，这个 T 称为带权 w_1，w_2，…，w_t 的**最优树**。

定理 11.7 在权为 $w_1 \leqslant w_2 \leqslant \cdots \leqslant w_t$ 的最优树中，必有 T 满足：

①权为 w_1 和 w_2 的叶 v_1 和 v_2 是兄弟。

②设 v_1 和 v_2 的父亲是 v。如果从 T 中删去 v_1 和 v_2，并把 v 改成权为 w_1+w_2 的叶之后的树记为 T_1，则 T_1 是权为 w_1+w_2，w_3，…，w_t 的最优树。



定义 11.7 如果在由 0，1 序列构成的集合中，任何一个序列都不是其他序列的前缀，则称这个集合为**前缀码**。(Huffman)

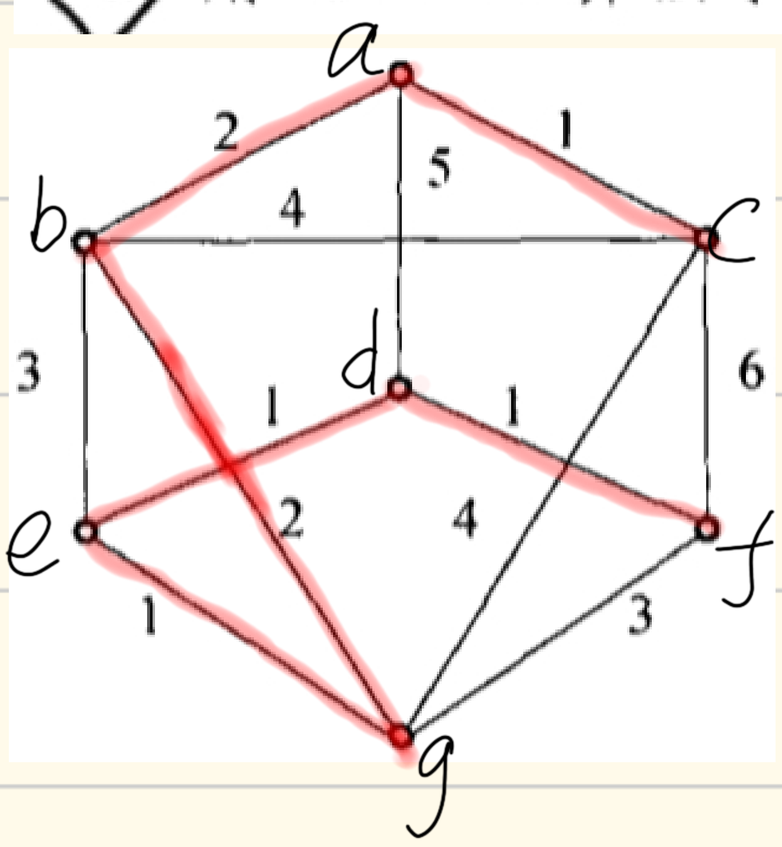
Ch 11 习题集

10. 设 e 是连通图 G 的一条边。证明：e 是 G 的割边当且仅当 e 含于 G 的每个生成树中。

充分性：若e不含于G的某一生成树T中，故G-e仍包含T，由于T连通，G-e连通，由于e为G的割边，G-e不连通，矛盾

必要性：因e含于G的任一生成树，若e不为割边，G-e连通，必存在另一生成树T_0，$e \notin T_0$，矛盾

12. 用 Kruskal 算法求图 11-13 的一个最小生成树。



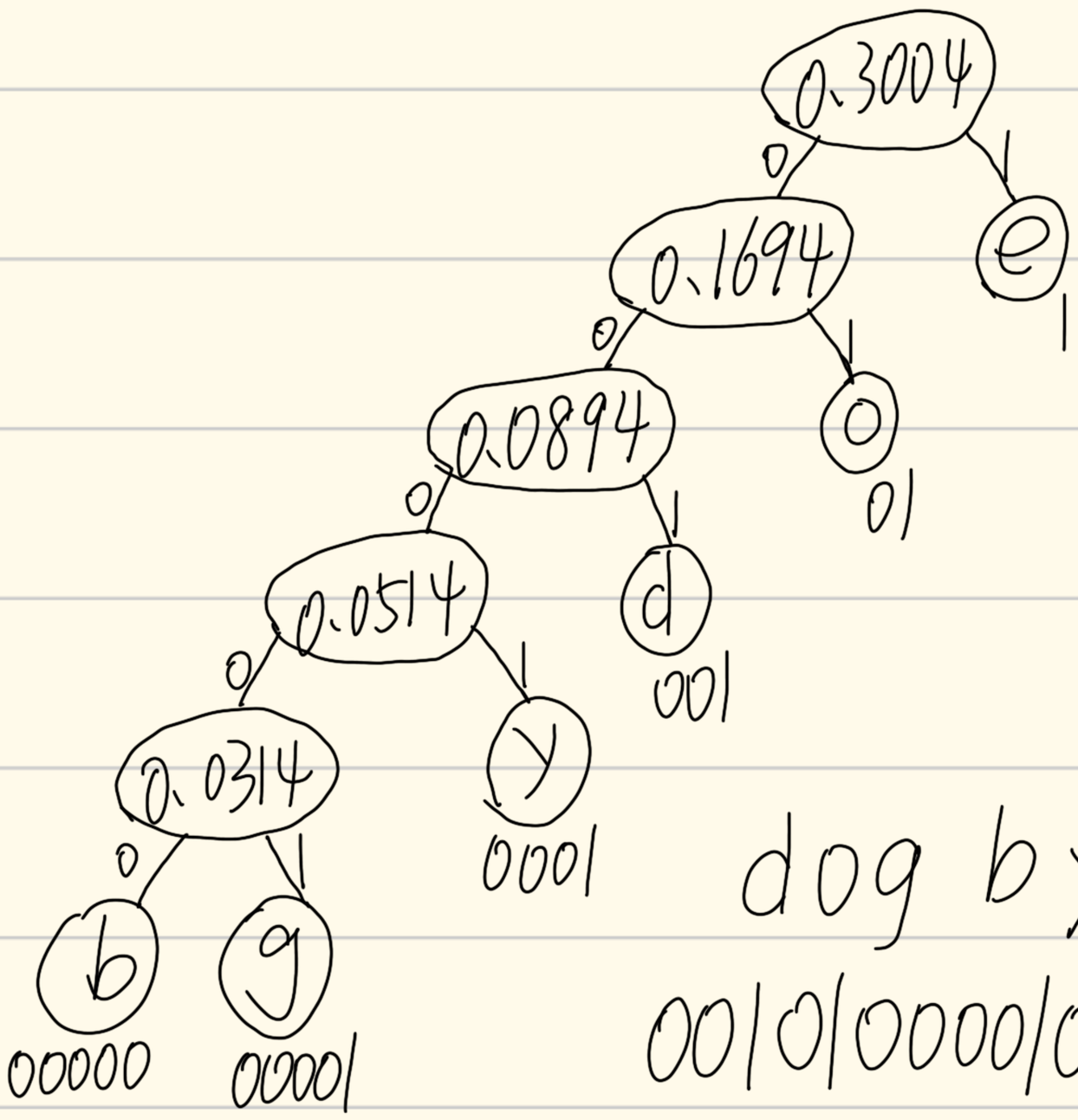
最小生成树边集为

{df, de, eg, gb, ba, ac}

①边按权值排序

②从小权值扫描，使之不构成回路

23. 设英文字母 b，d，g，o，y，e 出现的频率分别是 0.014，0.038，0.02，0.08，0.02，0.131，构造一个与它们对应的前缀码，并写出符号串 *dogbybed* 对应的编码。



dog by bed

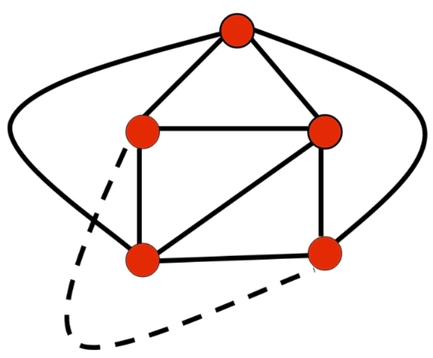
001|0|0000|00000000|00000|001

第12章 平面图及其应用

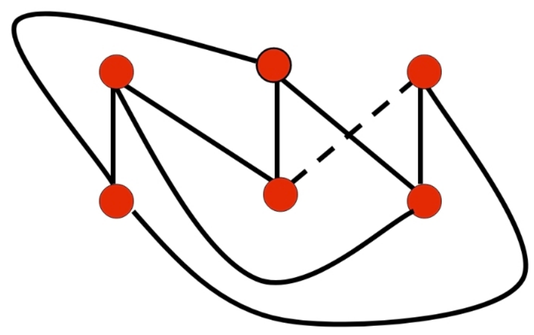
定义 12.1 若图 $G=(V, E)$ 存在着一种图形表示，使得将它画在平面上后没有两个结点重合，每条边不自身相交且没有两条边在它们公共关联的结点以外相交，则称 G 是**具有平面性的图**，或简称为**平面图**。

典型的非平面图

例：完全图K_5是典型的非平面图。



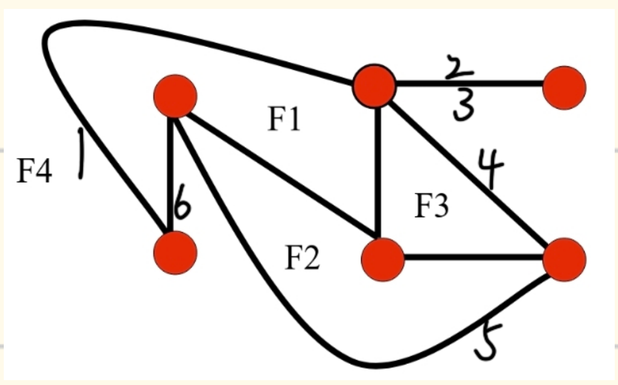
例： 完全二部图$K_{3,3}$是典型的非平面图。



定义 12.2 设 G 是一个平面图。若 G 的图形中由边围成的一个封闭区域，不能再分割成两个或两个以上的子区域，则称这个封闭区域为 G 的**面**。包围这个区域的边称为面的**边界**。面的边界中的边数称为面的**度**（割边在计度时算作两条边），记为 $\deg(F)$。

面 < 内部面
外部面（有且仅有1个）

例如：



$d(F_3)=3$
$d(F_4)=6$

定理 12.3 平面图 G 中所有面的面度之和等于边数 m 的 2 倍，即

$$\sum_{i=1}^{r}\deg(F_i)=2m$$

其中 r 为 G 的面数。

欧拉公式

定理 12.4 设 G 是一个面数为 f 的 (n, m) 连通平面图，则

$$n-m+f=2$$

推论：

定理 12.5 设 G 是一个阶数大于 2 的 (n, m) 连通简单平面图，则

$$m\leqslant 3n-6$$

证明：$d(F)\geqslant 3$

$\Rightarrow \sum d(F)=2m\geqslant 3f$

$\Rightarrow f=2+m-n\leqslant \frac{2}{3}m$

如：K_5为非平面图

$(5, C_5^2)$ $10\geqslant 3\times 5-6$

推论 12.5.1 在任何简单连通平面图中，至少存在一个其度不超过 5 的结点。

定理 12.6 设 G 是一围长 g 大于 2 的 (n, m) 连通平面图，则

$$m \leqslant \frac{gn-2g}{g-2}$$

证明：$d(F) \geqslant g$

$$\sum d(F) = 2m \geqslant gf$$

$$f = 2+m-n \leqslant \frac{2m}{g}$$

$$\Rightarrow m \leqslant \frac{g\cdot(n-2)}{g-2}$$

如：$K_{3,3}$ 为非平面图

$(6, 3\times3)$ $g \geqslant \frac{6\times(3-2)}{6-2}$

细分图

1。图的细分：在图的边上设置若干2度点后得到图称为原图的细分图。

定理 12.8（**Kuratowski 定理**） 一个图是平面图，当且仅当它不包含与 K_5 或 $K_{3,3}$ 的细分图同构子图。

对偶图

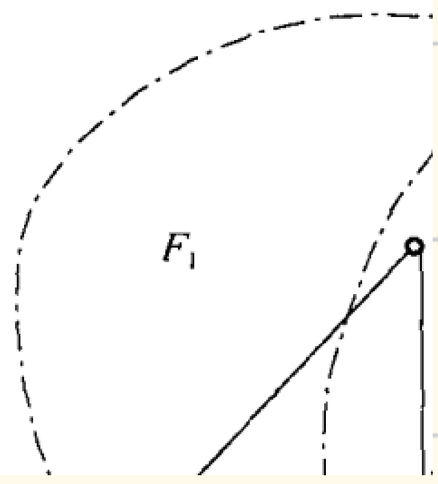
定义 12.3 设 $G=(V, E)$ 是一个平面图。构造图 $G^*=(V^*, E^*)$ 如下：

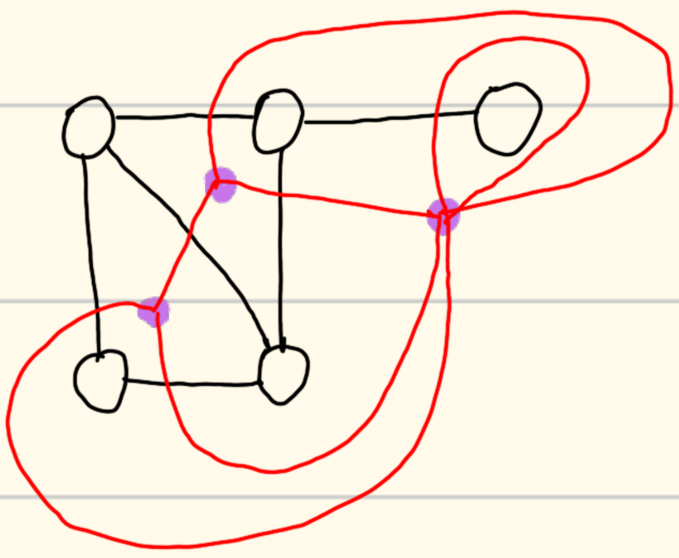
①G 的面 $F_1, F_2, \cdots, F_f$ 与 V^* 中的点 $u_1^*, u_2^*, \cdots, u_f^*$ 一一对应；

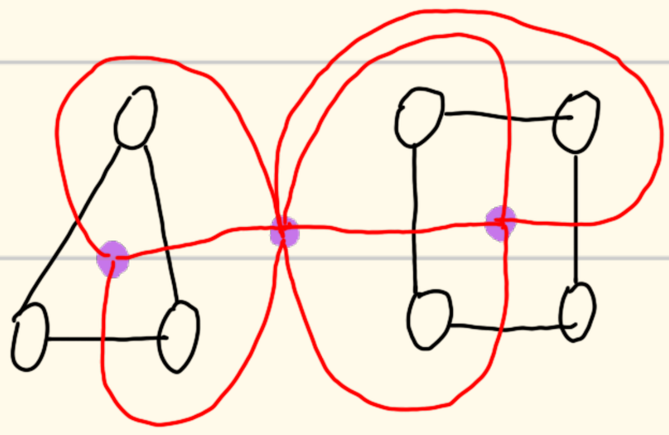
②若面 F_i 和 F_j 邻接，则 u_i^* 与 u_j^* 邻接；

③若 G 中有一条边 e 只是面 F_i 的边界，则 u_i^* 有一环。

图 G^* 是 G 的**对偶图**。







性质：

① 对偶图G*是连通图。

② 图G和对偶图G*同是平面图。

③ 如果图G是连通图，则$(G^*)^* \cong G$.

④ G的边割集对应G*的回路，G *的边割集对应G的回路。

定义 12.4 设 G^* 是平面图 G 的对偶图，若 $G^* \cong G$，称 G 为**自对偶图**。

Ch12 习题集

3. 设 G 是阶数不小于 11 的图。证明：G 或 $\overline{G}$ 中至少有一个是非平面图。

设$G(n,m)$，$n\geq 11$，则$\overline{G}(n,C_n^2-m)$

若$m>3n-6$，则G为非平面图，若$m\leq 3n-6$，若$\overline{G}$为平面图，则

$C_n^2-(3n-6)\leq C_n^2-m\leq 3n-6$，即$n^2-13n+24\leq 0$，当$n\geq 11$时，不满足，

故$\overline{G}$为非平面图

4. 证明：具有 6 个结点，12 条边的简单连通平面图，它的面的度数都是 3。

$G(n,m)$，$n=6$，$m=12$，$d(f_i)=3$，设面数为f，

$\sum d(f_i)=3f=2m=24$，$f=8$

故$n-m+f=2$，为连通平面图

5. 证明：少于 30 条边的简单平面至少有一个顶点的度不大于 4。

若所有顶点u_i，$d(u_i)\geq 5$，对图$G(n,m)$，由图论基本定理

$\sum d(u_i)=2m\geq 5n$，又因平面图，$m\leq 3n-6$，即

$\frac{5}{2}n\leq m\leq 3n-6$，$n\geq 12$，即$m\geq\frac{5}{2}n\geq 30$，矛盾

第13章 欧拉图

定义 13.1 设 G 是一个无向图，包含 G 的每条边的简单道路称为**欧拉道路**，包含 G 的每条边的简单回路称为**欧拉回路**，具有欧拉回路的图称为**欧拉图**。

欧拉图的判定

无向图：

定理 13.1 连通图 G 是欧拉图，当且仅当 G 不含奇数度结点。

推论 13.1.1 非平凡连通图 G 含有欧拉道路，当且仅当 G 最多有两个奇数度结点。

有向图：

定理 13.2 连通有向图 G 含有有向欧拉回路，当且仅当 G 中每个结点的入度等于出度。连通有向图 G 含有有向欧拉道路，当且仅当除最多两个结点外，其余每个结点的入度等于其出度，而这两个结点中一个结点的入度比其出度多 1，另一结点的入度比其出度少 1。

欧拉回路构造：

由欧拉图 $G=(V, E)$ 构造欧拉回路算法如下：

1）从 G 中任选一点 v_0 和与 v_0 关联的边 e_0，置 $s=v_0$，$e=e_0$。

2）记录 s 和 e，并在 G 中标记 e。设与 e 关联的另一结点为 u_0，置 $s=v_0$。

3）设从 G 中删去已标记过的全部 k 条边后得到的子图为 G_k，则

①当 G_k 为零图时，算法结束。

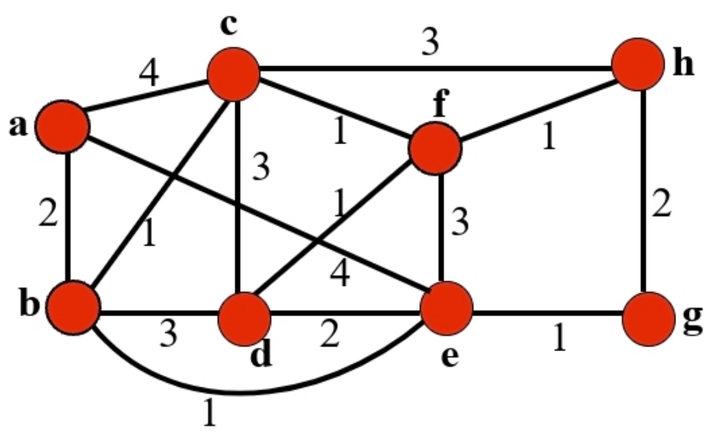
②若在 G_k 中与 s 关联的边都不是割边，则任选其中一边 e'，置 $e=e'$，转 2)。

③若在 G_k 中与 s 关联的边有割边 e' 且 s 是 G_k 中的一度点，则令 $e=e'$，转 2)；否则在 G_k 中任选一条与 s 关联的非割边 e''，令 $e=e''$，转 2)。

(先走非割边，再走割边)

中国邮递员问题

在一个带边权的简单连通图中，构造一条包括全部边的回路（边可能重复），并使回路的权和最小。



求解无向图的中国邮递员问题算法：

1）若 G 不含奇度结点，则按本节前面介绍的方法构造的欧拉回路，就是问题的解。

2）若 G 含有 $2k$ 个奇度结点，则先求出其中任何两个结点之间的最短道路，然后再在这些道路之中找出 k 条道路 P_1，P_2，…，P_k，使得

2k奇度点⇒C_{2k}^2个组合⇒分2k-1组

①任何 p_i 和 $p_j(i\neq j)$ 没有相同的起点和终点。

②在所有满足 1)的 k 条道路的集合中，P_1，P_2，…，P_k 的长度总和最短。

3）根据 2）中求出的 k 条最短道路 P_1，P_2，…，P_k，在原图 G 中复制所有出现在这 k 条道路上的边，设所得之图为 G'。

先补k条边，再求欧拉回路

4）造 G' 的欧拉回路，即得到中国邮递员问题的解。

哈密顿图

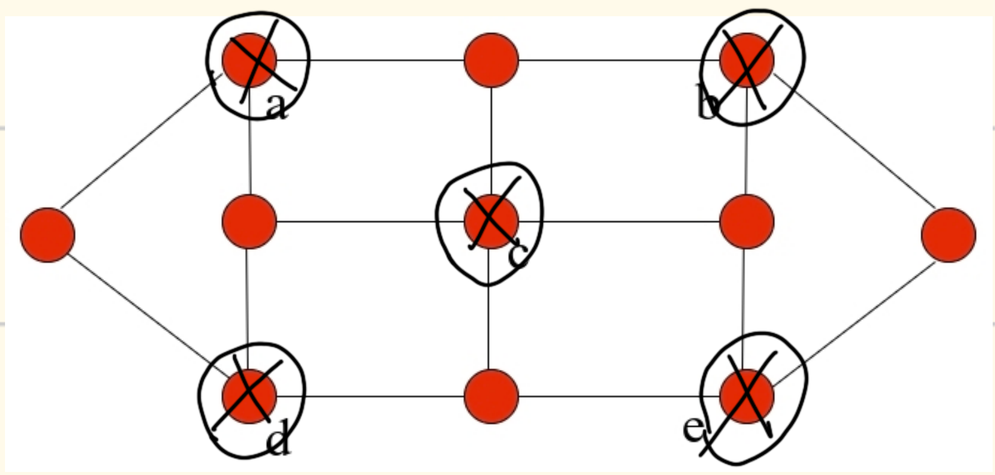
定义 13.2 设 G 是一个连通图。若 G 中存在一条包含全部结点的基本道路，则称这条道路为 G 的**哈密顿道路**。若 G 中存在一个包含全部结点的圈，则称这个圈为 G 的**哈密顿圈**。含有哈密顿圈的图称为**哈密顿图**。

判断的必要条件

定理 13.3 如果 $G=(V, E)$ 是哈密顿图，则对 V 的任何非空真子集 S，都有

$$\omega(G-S) \leqslant |S|$$

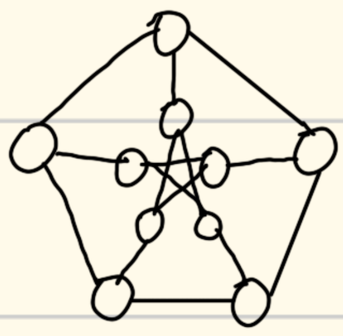
例如：



去除5个结点，$W(G-S)=6 \not\leq |S|=5$

注意：满足 $W(G-S) \leq |S|$ 未必为哈密顿图

如



判断的充分条件

定理 13.4 设 $G=(V, E)$ 是 n 阶简单图。如果 G 中任一对结点 u 和 v，满足 $d(u)+d(v) \geqslant n-1$，则 G 中必有哈密顿道路。

定理 13.5 设 $G=(V, E)$ 是 $n \geqslant 3$ 阶的简单图。若对每对结点 $u, v \in V$，$d(u)+d(v) \geqslant n$，则 G 必是哈密顿图。

例如：$n(n>2)$ 阶简单图 G 边数 $m \geqslant 2+\frac{(n-1)(n-2)}{2}$，证 G 为哈密顿图

设 $d(u)+d(v)=k$ 最小，则

其余 $n-2$ 个点度和 $\leqslant \underbrace{(n-2)(n-3)}_{\text{若 } n-2 \text{ 点构成完全图}} + \underbrace{k}_{\text{与 } u, v \text{ 相连的边}}$

故 $\sum d(v_i) \leqslant 2k+(n-2)(n-3)$

$$=2m \geqslant 4+(n-1)(n-2)$$

即 $k \geqslant n$，$(d(u)+d(v))_{min} \geqslant n$

图的闭包

定义 13.3 设 $G=(V, E)$ 是 n 阶的简单图。若存在一对不相邻接的结点 u 和 v，满足 $d(u)+d(v) \geqslant n$，则构造图 $G+uv$ 并且在图 $G+uv$ 上重复上述步骤，直至不再存在着这样的结点对为止，所得之图称为 G 的**闭包**，记为 $c(G)$。

定理 13.6 一个简单图是哈密顿图当且仅当其闭包图是哈密顿图。

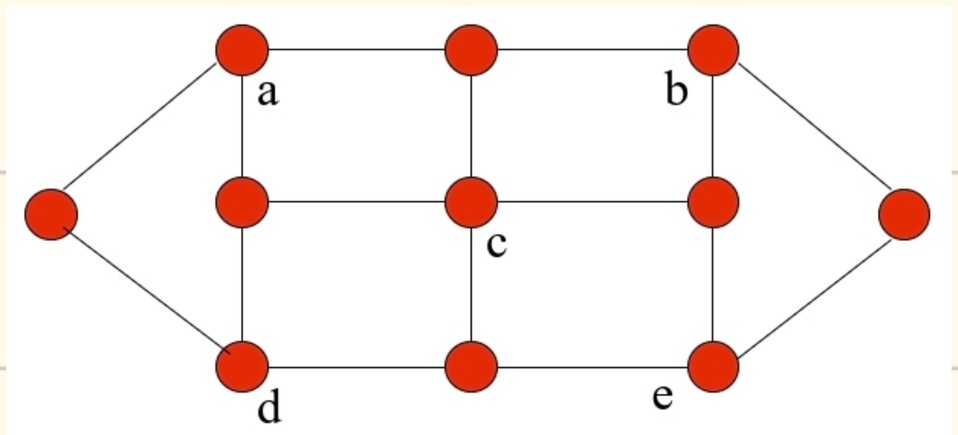
哈密顿图的另一必要条件

定理 13.7 设 G 是一个 n 阶无环的连通平面图。若 G 含有哈密顿圈 C，则

$$\sum_{i=1}^{n}(i-2)(f_i^{(1)}-f_i^{(2)})=0$$

其中 $f_i^{(1)}$ 和 $f_i^{(2)}$ 分别是含在圈 C 内部和外部的 i 度面的数目。

例如：



$$\begin{cases}(4-2)\cdot(f_4^{(1)}-f_4^{(2)})+(8-2)\cdot(f_8^{(1)}-f_8^{(2)})=0\\ f_4^{(1)}+f_4^{(2)}=6\\ f_8^{(1)}+f_8^{(2)}=1\end{cases}$$

⇒不成立⇒不是Q哈密顿图

在完全图 K_n 中，边不重合的Q哈密顿圈的数量为 $\frac{(n-1)}{2}$

K_n 中任两个结点均可达，共 C_n^2 条边

而一个Q哈密顿圈有 n 条边

$$\Rightarrow \frac{C_n^2}{n}=\frac{n-1}{2}$$

总结

欧拉图：可边不重复遍历所有边

↳不含奇数度结点 / 入度=出度 + 连通

哈密顿图：可边点均不重复遍历所有结点

是 $d(v)+d(u)\geq n$ + 连通

不是 $W(G-S)\leq|S|$ 或 $\sum(i-2)\cdot(f_i^{(1)}-f_i^{(2)})\neq 0$

平面图 不是 细分图含 $K_{3,3}$ 或 K_5 或 $n-m+f\neq 2$

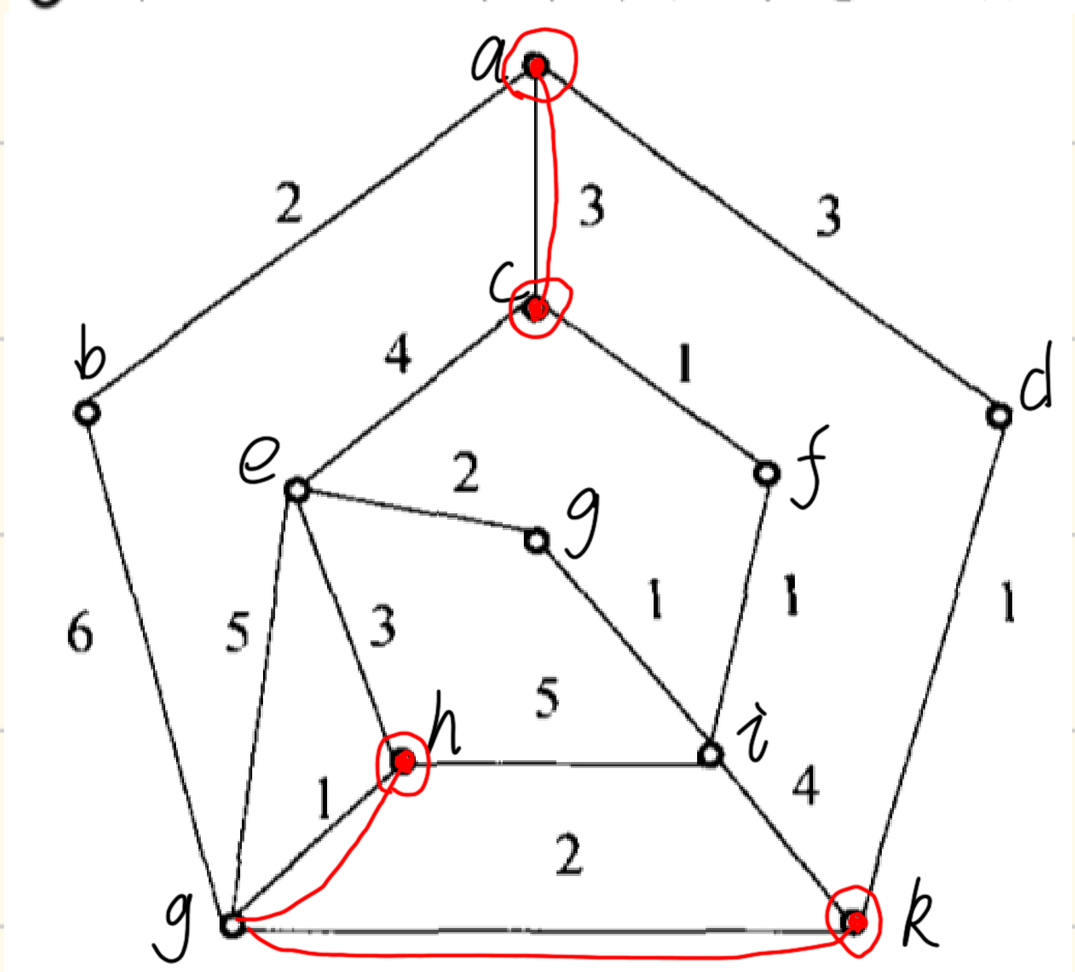
Ch13 习题集

2. 设 $G=(V, E)$是一个具有 $2k(k>0)$ 个奇数度结点的连通图。证明：G 中必存在 k 条边不相重的简单道路 P_1，P_2，…，P_k，使得

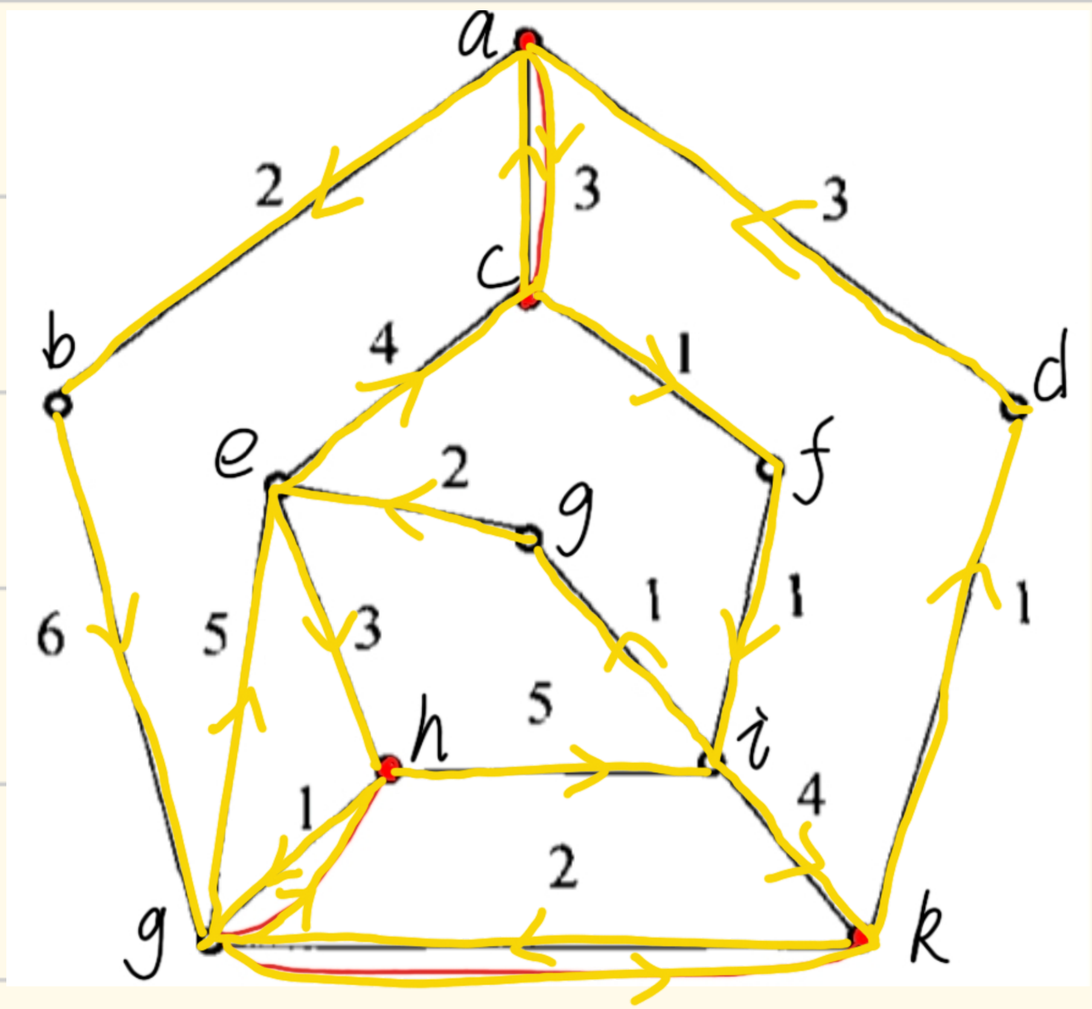
$$E = E(P_1) \cup E(P_2) \cup \cdots \cup E(P_k)$$

将2k个奇数度的结点分为k组，每组再添加一条边，变为2个偶数度结点，故与其它未分组结点构成欧拉图。对一组结点，删去添加的边，得到欧拉道路P_k，再删一点得到P_{k-1}，…得到P_1，$E=E(P_1)\cup\cdots\cup E(P_k)$

5. 在图 13-10 中求中国邮递员问题的解。



ac=3 (a→c) ✓
adkgh=7 (a→h)
adk=4 (a→k)
ceh=7 (c→h)
cfik=6 (c→k)
hgk=3 (h→k) ✓



由欧拉回路算法，

解为

abgehghigecacfi
kgkda

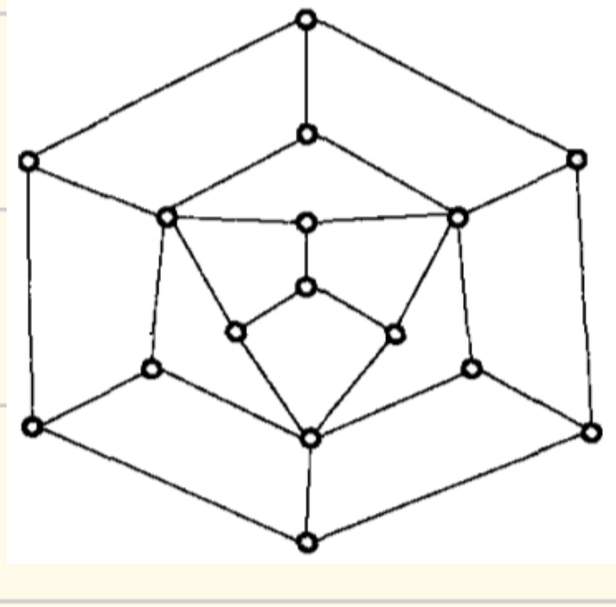
12. 11 个学生打算几天都在一张圆桌上共进午餐，并且希望在每次午餐时，每个学生两旁所坐的人都不相同。问 11 人共进午餐最多能有多少天？

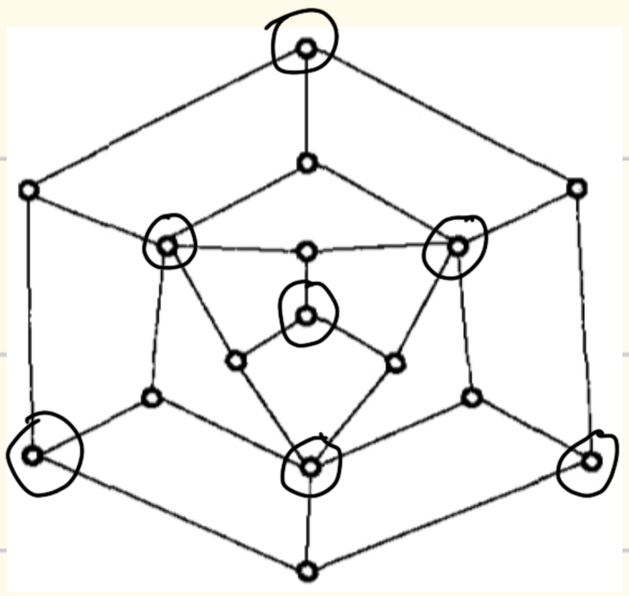
对于K_{11}，每个结点代表一个学生，每次午餐都是一个哈密顿圈

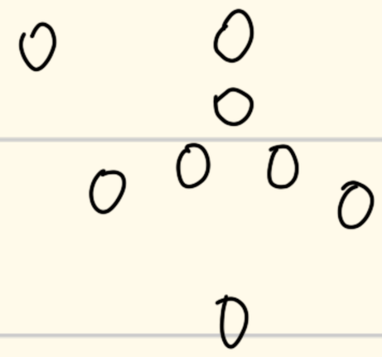
K_{11}中边总数C_{11}^2，哈密顿圈边数11

无重复边的哈密顿圈数为$\frac{C_{11}^2}{11}=5$个

15. 用两种以上的办法判别图 13-11 不是哈密顿图。



① 

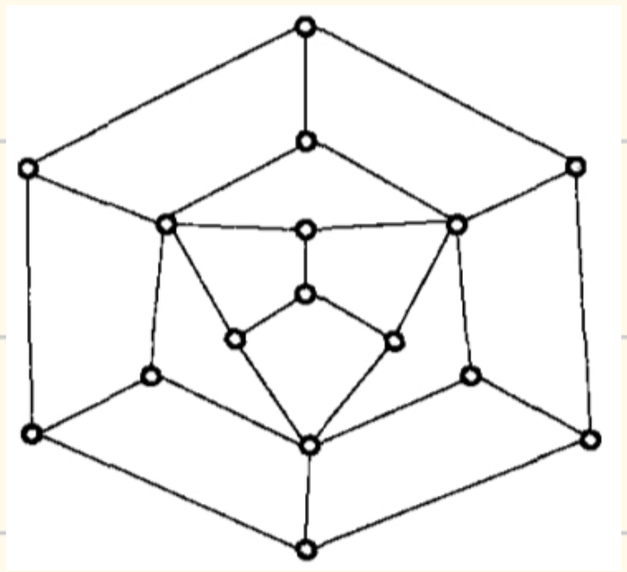


删去7个点后，

$W(G-S)=9$

$>|S|=7$

② 结点数共有16个



6度面：$f_6=1$

4度面：$f_4=9$

3度面：$f_3=3$

假设图中存在哈密顿圈，则

$$\begin{cases} f_6^{(1)}+f_6^{(2)}=1 \\ f_4^{(1)}+f_4^{(2)}=9 \\ f_3^{(1)}+f_3^{(2)}=3 \\ (6-2)\cdot(f_6^{(1)}-f_6^{(2)})+(4-2)\cdot(f_6^{(1)}-f_6^{(2)}) \\ +(3-2)\cdot(f_6^{(1)}-f_6^{(2)})=0 \end{cases}$$

无整数解

9. 证明：凡有割点的图都不是哈密顿图。

若为哈密顿图，存在哈密顿圈，删去割点v，仍有哈密顿道路，连通，与割点矛盾

第14章 代数系统

运算

定义 14.1 设 S 是一个非空集合，映射 $f: S^n \to S$ 称为 S 上的一个 n 元运算。

一元运算 $\Rightarrow \bar{a}$

二元运算 $\varphi: S^2 \to S \Rightarrow x \varphi y$

运算表

$\circ$	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	b	c	d
c	a	c	b	d
d	a	d	c	b

二元运算性质

定义 14.2 设“$\cdot$”是定义在集合 S 上的二元运算。如果

① $\forall x, y \in S$，$x \cdot y \in S$，则称“$\cdot$”在 S 上是**封闭**的。

② $\forall x, y \in S$，$x \cdot y = y \cdot x$，则称“$\cdot$”在 S 上是**可交换**的。

③ $\forall x, y, z \in S$，$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$，则称“$\cdot$”是**可结合**的。

④ $\forall x \in S$，$x \cdot x = x$，则称“$\cdot$”是**幂等**的。

定义 14.3 设 $\cdot$ 和 $*$ 是同时定义在 S 上的两个二元运算。如果

① $\forall x, y, z \in S$，$x * (y \cdot z) = (x * y) \cdot (x * z)$ 且 $(y \cdot z) * x = (y * x) \cdot (z * x)$，则称运算 $*$ 关于 $\cdot$ 是**可分配**的。

② $*$ 和 $\cdot$ 是可换运算，且 $\forall x, y \in S$，$x * (x \cdot y) = x$ 及 $x \cdot (x * y) = x$，则称运算 $*$ 和 $\cdot$ 满足**吸收律**。

代数系统

定义 14.4 一个非空集合 S 连同若干个定义在 S 上的运算 $f_1, f_2, \cdots, f_k$ 所组成的系统称为一个**代数系统**，记为 $\langle S, f_1, f_2, \cdots, f_k \rangle$。

特异元

定义 14.5 设 $\langle S, \cdot \rangle$ 是一个代数系统，则

①如果 $\exists e \in S$ 使 $\forall x \in S$，$e \cdot x = x \cdot e = x$，则称 e 为（代数系统）的**幺元**（或**单位元**）。

②如果存在 $\theta \in S$，使 $\forall x \in S$，$\theta \cdot x = x \cdot \theta = \theta$，则称 θ 为系统的**零元**。

③$a \in S$，如果 $a \cdot a = a$，则称 a 是系统的**幂等元**。

定义 14.6 设在代数系统 $\langle S, \cdot \rangle$ 中，e 是幺元，a 是 S 中的一个元素。如果存在 $b \in S$ 使得 $a \cdot b = b \cdot a = e$，则称 b 是 a 的**逆元**，记为 $b = a^{-1}$。

唯一性

定理 14.1 设 $\langle S, \cdot \rangle$ 是一个代数系统。如果存在幺元，则幺元是唯一的；如果存在零元，则零元是唯一的；如果元 a 有逆元，且“$\cdot$”可结合，则逆元是唯一的。

代数系统的分层

定义 14.7 设〈S, $\cdot$〉是一个代数系统，则

①当“$\cdot$”是封闭的，称〈S, $\cdot$〉为**广群**。

②如果〈S, $\cdot$〉是广群，且“$\cdot$”是可结合运算，则称〈S, $\cdot$〉是**半群**。

③如果〈S, $\cdot$〉是半群，且存在幺元，则称〈S, $\cdot$〉为**含幺半群**。

④如果〈S, $\cdot$〉是含幺半群，且每个元素都有逆元，则称〈S, $\cdot$〉为**群**。

从定义看，全部群⊂全部含幺半群⊂全部半群⊂全部广群。群的条件最多，可用闭、结、幺、逆四个字加以概括。

第15章 半群与群

常见的半群

1。实数集含幺加半群⟨R，+⟩：封闭、可结合、有幺元 0 。

$0+x=x$

2。实数集含幺乘半群 ⟨R， ×⟩：封闭、可结合、有幺元 1。

$1\times x=x$

3。正整数集加半群⟨Z_+，+⟩：封闭、可结合、无幺元 。

4。整数集模 n含幺加半群⟨ Z_n，⊕ ⟩：封闭、可结合、有幺元 [0]。

$[0]\oplus[k]=[k]$

5。整数集模 n含幺乘半群⟨ Z_n，⊗ ⟩：封闭、可结合、有幺元 [1]。

$[1]\otimes[k]=[k]$

6。在有限字母表Σ上的字符串集Σ*中定义运算“∘”，（称为字符串的连接）。$\langle\Sigma^*,\circ\rangle$：含幺半群

空串入，入∘"abc"="abc"

半群中元素的幂

定理 15.1 设〈S，•〉是半群，$a\in S$，m 和 n 是正整数，则

① $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

② $(a^m)^n = a^{mn}$

当〈S，•〉是含幺半群时，上述结论对任意非负整数 m 和 n 都成立。

定理 15.2 设〈S，•〉是一个半群，如果 S 是有限集，则必有 $a\in S$ 使得 $a^2=a$。

（有限半群必有幂等元）

子半群

定义 15.1 设〈S，•〉是一个半群，非空集合 $A\subseteq S$，并且〈A，•〉也是半群，则称〈A，•〉是〈S，•〉的**子半群**。

常见的群

1。实数集加群⟨ **R**，**+** ⟩：封闭、可结合、有幺元 **0**、数**a**的逆元是 **-a** 。

2。非零实数集乘群⟨ **R-{0}**，× ⟩：封闭、可结合、有幺元 **1**、数 **a**的逆元是**1/a** 。

3。整数集模 n加群〈Z_n，⊕〉：封闭、可结合、有幺元 [0]、[i] 的逆元是 [n - i]。(剩余类加群)

$[i]\oplus[n-i]=[n]=[0]$(幺元)

4。设Mn是全体n阶满秩阵构成的集合，定义运算“•”为矩阵的乘法，那么〈Mn，•〉是n 阶满秩矩阵乘群。运算封闭、可结合、有幺元（n阶单位矩阵）、每个满秩阵的逆就是其逆矩阵。

$\langle Mn,+\rangle$ 满秩矩阵加法因不封闭，不构成群

5。当 k是素数时，〈Z_k –{[0]}，⊗〉是模 k乘群：封闭、可结合、有幺元 [1]，元[a] 的逆元是[i]。

因a,k互素，存在i,j，$a\times i+k\times j=1$，即 $a\times i\equiv 1 \pmod k$

$\Rightarrow [a]\otimes[i]=[1]$

$\langle Z_k-\{[0]\},\otimes\rangle$，k为非素数时，不构成群

6。3个元素集合A={a, b, c}上的全体置换集合S_3={(a), (ab), (ac), (bc), (abc), (acb)}关于置换的复合构成群: 闭, 结, 有幺元(a). 每个循环的逆就是把循环倒过来的结果.

n元集合上的全体置换集合关于复合运算构成群$\langle Sn,\circ\rangle$

$\Rightarrow$n次对称群

群的性质

定理 15.3 如果〈G，•〉是半群，并且对任意 a，$b\in G$，都存在 x，$y\in G$ 使 $x\cdot a=b, a\cdot y=b$(方程有解)则〈G，•〉是群。

定理 15.4 在群〈G，•〉中消去律成立，即如果 $a\cdot b=a\cdot c$，则必有 $b=c$。

推论 15.4.1 群〈G，•〉的运算表中每行和每列都没有重复元素。

子群

定义 15.2 设〈G，•〉是群，S是G的非空子集。如果〈S，•〉也是群，则称 S 是 G 的子群。

定理 15.7 子群的幺元与群的幺元相同。

定理 15.8 设〈G，•〉是群，S是G的非空子集。〈S，•〉是〈G，•〉的子群当且仅当对任何 a，$b\in S$，$a\cdot b^{-1}\in S$。(子群的证明方法)

例：$\langle G,\circ\rangle$为群，$H=\{x\mid x\in G\wedge(\forall y\in G)[x\circ y=y\circ x]\}$，证明$\langle H,\circ\rangle$为子群

$\forall y\in G$, $a\circ y=y\circ a$, $a^{-1}\circ(a\circ y)\circ a^{-1}=a^{-1}\circ(y\circ a)\circ a^{-1}$, $y\circ a^{-1}=a^{-1}\circ y$,

即$a^{-1}\in H$　　设$a,b\in H$, $\forall y\in G$, $y\circ(a\circ b^{-1})=(a\circ y)\circ b^{-1}=(a\circ b^{-1})\circ y$,

即 $a\circ b^{-1}\in H\Rightarrow\langle H,\circ\rangle$为子群

交换群

定义 15.3 如果群〈G, $\cdot$〉的运算满足交换律，则称群 G 为**交换群**（或 **Abel 群**）。

（或加群）

例如：$\langle Z,+\rangle$；$\langle Z_n-\{[0]\},\otimes\rangle$；$\langle R-\{0\},\times\rangle$

而$\langle M_n,\cdot\rangle$矩阵乘法、$\langle S_n,\circ\rangle$置换不为交换群

定理 15.9 群〈G, $\cdot$〉为交换群的充要条件是：对任意 a，$b\in G$，$(a\cdot b)^2=a^2\cdot b^2$。

或$(a\cdot b)^m=a^m\cdot b^m, m>1$

循环群

定义 15.4 如果群〈G, $\cdot$〉中存在一个元 a，使得 G 能由 a 生成，即 $G=(a)$，则称 G 为**循环群**，称 a 是 G 的一个**生成元**。

例如：剩余类加群$\langle Z_k,\oplus\rangle$、素数k剩余类乘群$\langle Z_k-\{[0]\},\otimes\rangle$、加群$\langle Z,+\rangle$为循环群

对$\langle Z,+\rangle$，a^k可表示为$k\times a$，故$\forall n\in Z$，$n=n\times 1$

$n=(-n)\times(-1)$

对$\langle Z_7-\{[0]\},\otimes\rangle$，$[5]\otimes[5]=[4]$，$[5]^3=[5]\otimes[4]$

$=[6]$，$[5]^4=[2]$，$[5]^5=[3]$，$[5]^6=[1]$，$[5]^7=[5]$

循环群一定是交换群。

注意，如果a是循环群〈G，°〉的生成元，那么 a^{-1}也是生成元。因为 $a=(a^{-1})^{-1}$。

循环子群

定理　每个群都包含循环子群。

设 a 是群〈G，°〉的元素，$H=\{a^k \mid k\in Z\}=(a)$。那么〈H，°〉就是G的 一个循环子群。

周期

定义 15.5 设〈G, $\cdot$〉是群，$a\in G$，称使得 $a^n=e$ 的最小正整数 n 为元素 a 的**周期**。如果不存在这种最小正整数，则称 a 的周期为∞。

定理 15.10 设群〈G, $\cdot$〉中元素 a 的周期为正整数 n，则

①$a^m=e$，当且仅当 $n\mid m$。

②$a^i=a^j$，当且仅当 $n\mid(i-j)$。

③由 a 生成的子群恰有 n 个元素，即 $(a)=\{e, a, a^2, \cdots, a^{n-1}\}$。

陪集

定义 15.6 设〈H，$\cdot$〉是群〈G，$\cdot$〉的一个子群，$a\in G$，记$aH=\{a\cdot h|h\in H\}$，称aH是H在G中关于元a的**左陪集**。同样，称$Ha=\{h\cdot a|h\in H\}$为H在G中关于元a的**右陪集**。由左（右）陪集构成的集合的基数称为**子群的指数**。

当$a\in H$时，$aH=Ha=H$

当运算$\cdot$可交换时，$\forall a\in G$，$aH=Ha$

例如：群$G<Z_7-\{[0]\},\otimes>$及其子群$H=\{[1],[6]\}$

$[1]H=\{[1],[6]\}=[6]H$

$[2]H=\{[2],[5]\}=[5]H$

$[3]H=\{[3],[4]\}=[4]H$

① 群G中任何元素必属于某个左陪集.

② 同一左陪集的元素，其左陪集相同；即a∈bH时，b∈aH.

③ 任何2个左陪集要么相等，要么不相交.

④ 任何2个左陪集等势.

一个左陪集相当于一个等价类

定理 15.11 设H是群G的子群，a，$b\in G$。在G中建立二元关系如下

$$aRb\Leftrightarrow b\in aH$$

则R是G上的一个等价关系。

$$G = eH \cup a_1H \cup a_2H \cup\cdots \cup a_iH \cup\cdots$$

$$G = He \cup Ha_1 \cup Ha_2 \cup\cdots \cup Ha_i \cup\cdots$$

（群的陪集分解）

拉格朗日定理

定理 15.13 拉格朗日定理 n阶群〈G，$\cdot$〉的任何子群〈H，$\cdot$〉的阶必是n的因子。

证明：$|G|=|H|+|aH|+\cdots+|a_kH|=(k+1)H$

推论 15.13.1 n元群G中任何元素的周期必是n的因子。

正规子群

定义 15.7 设〈H，$\cdot$〉是群〈G，$\cdot$〉的一个子群。如果对于任何$a\in G$，$aH=Ha$，则称H是G的**正规子群**（或**不变子群**）。

交换群的任何子群都是正规子群

定理 15.14 设H是群G的正规子群，则H是正规子群，当且仅当对任何$a\in G$，$aHa^{-1}\subseteq H$。（正规子群的证明方法）

同态

定义 15.9 设〈S，$\cdot$〉和〈T，$\circ$〉是两个代数系数，其中“$\cdot$”和“$\circ$”分别是S和T的二元运算。如果存在映射f：$S\to T$使得对任意a_1，$a_2\in S$

$$f(a_1\cdot a_2)=f(a_1)\circ f(a_2)$$

则称f是S到T的**同态映射**，或者S和T（在影射f下）**同态**，记为$S\sim T$；称$f(S)\subseteq T$为S的**同态像**。

当 f 是满射时，称 f 为**满同态**；当 f 是双射时，称 f 为**同构映射**。代数系统 S 和 T（在 f 下）同构记为 $S \cong T$。

同态的性质

定理 15.15 设 f 是从代数系统 $\langle S, \cdot \rangle$ 到代数系统 $\langle T, \circ \rangle$ 的同态映射，则

①如果运算“$\cdot$”在 S 中是封闭的，那么运算“$\circ$”在 $f(S)$ 中也是封闭的。

②如果运算“$\cdot$”在 S 中可结合，那么运算“$\circ$”在 $f(S)$ 中也可结合。

③如果运算“$\cdot$”在 S 中可交换，那么运算“$\circ$”在 $f(S)$ 中也可交换。

④如果运算“$\cdot$”在 S 中有幺元，那么运算“$\circ$”在 $f(S)$ 中也有幺元。

⑤如果 S 中每元关于运算“$\cdot$”有逆元，那么 $f(S)$ 中每元关于运算“$\circ$”也有逆元。

推论

推论：设〈A，°〉和〈B，*〉是两个代数系统，如果A ~ B，同态映射为f，那么

① 如果〈A，°〉是广群，则〈f(A)，*〉也是广群；

② 如果〈A，°〉是半群，则〈f(A)，*〉也是半群；

③ 如果〈A，°〉是含幺半群，则〈f(A)，*〉也是含幺半群；

④ 如果〈A，°〉是群，则〈f(A)，*〉也是群。

同态核

定义 15.10 设 f 使群 $\langle G, \cdot \rangle$ 到 $\langle H, \circ \rangle$ 的同态映射，e' 是 H 的幺元，记

$$\mathrm{Ker}(f) = \{x \mid x \in G \wedge f(x) = e'\}$$

则称 $\mathrm{Ker}(f)$ 为 f 的**同态核**。

定理 15.17 设 f 使群 $\langle G, \cdot \rangle$ 到 $\langle H, \circ \rangle$ 的同态映射，则 f 的同态核 $\mathrm{Ker}(f)$ 是 G 的正规子群。

总结

证明
- 子群 $S \subseteq G$, $\forall a, b \in S$, $a \cdot b^{-1} \in S$
- 交换群 $(a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2$
- 正规子群 $aHa^{-1} \subseteq H$

Ch15 习题集

4. 设半群〈A, $\cdot$〉中任何两个不同元素关于运算“$\cdot$”不可交换。证明：对任何$a \in A$，$a \cdot a = a$。

若$a \circ a \neq a$，则令$a \circ a = b$，$a \circ a \circ a = b \circ a = a \circ b$

而$a \circ b \neq b \circ a$，矛盾，故$b = a$，$a \circ a = a$

6. 证明：群中只有么元是幂等元。

设$a \neq e$，a为幂等元，则$a \circ a = a = a \circ e$，由消去律，

$a = e$，矛盾

11. 设〈S, $\cdot$〉和〈T, $\cdot$〉都是〈G, $\cdot$〉的子群，令$S \cap T = \{x \mid x \in S \wedge x \in T\}$，$ST = \{s \cdot t \mid s \in S \wedge t \in T\}$。证明：〈$S \cap T$, $\cdot$〉和〈ST, $\cdot$〉也都是〈G, $\cdot$〉的子群。($\circ$可交换)

$\langle S, \circ \rangle, \langle T, \circ \rangle$为子群，设$a \in S, a \in T, b \in S, b \in T$，则$a \circ b^{-1} \in S$，

$a \circ b^{-1} \in T$，$a \in S \cap T$，$b \in S \cap T$，$a \circ b^{-1} \in S \cap T$，故$\langle S \cap T, \circ \rangle$是$\langle G, \circ \rangle$的子群

若$a = s_1 \circ t_1 \in ST$，$b = s_2 \circ t_2 \in ST$，$s_i \in S$，$t_i \in T$，则$a \circ b^{-1}$

$= (s_1 \circ t_1) \circ (t_2^{-1} \circ s_2^{-1}) = s_1 \circ (t_1 \circ t_2^{-1}) \circ s_2^{-1}$

因$t_1 \in T, t_2 \in T, t_1 \circ t_2^{-1} \in T$，令$t_3 = t_1 \circ t_2^{-1} \in T$

$s_1 \in S, s_2 \in S, s_1 \circ s_2^{-1} \in S$，令$s_3 = s_1 \circ s_2^{-1} \in S$

即$a \circ b^{-1} = (s_1 \circ s_2^{-1}) \circ (t_1 \circ t_2^{-1}) = s_3 \circ t_3 \in ST$

故$\langle ST, \circ \rangle$是$\langle G, \circ \rangle$的子群

群→循环子群→交换群

16. 证明：每个阶数大于1的群必含有阶数大于1的交换子群。

若种，阶数>1，一定$\exists a \in G$，且$a \neq e$，

构造$H = (a) = \{e, a^1, a^1, \cdots, a^{n-1}\}$，因$H$循环群，必为交换若群，且为子群。因$a \neq e$，$a^n = e$，$n \geq 2$，$H$中元素个数$\geq 2$，阶数$>1$

17. 证明：循环群的子群必是循环群。

对循环群$G = (a) = \{e, a, a^{-1}, \cdots, a^{n-1}\}$

若$H = \{a^k, k = \cdots\}$，设其最小正幂元为a^c，

令 $k=pi+q$，（q为$k\%i$的余数，$q<i$），若$q>0$

$a^k = a^{pi+q} = (a^i)^p \cdot a^q$，$q>0$

$a^k \cdot a^{-pi} = a^q$，a^q一定在子群中

与子群中最小正幂元a^i矛盾（$q<i$）$\Rightarrow q=0$

$\Rightarrow a^k=(a^i)^p$，$H=(a^i)$

22. 3 次对称群 $\langle S_3, \circ \rangle$ 是 4 次对称群 $\langle S_4, \circ \rangle$ 的子群，写出 S_3 的所有左陪集。

$\langle S_3, o \rangle = \{(a),(ab),(bc),(ac),(abc),(acb)\}$

$\langle S_4, o \rangle = \{(a),(a,b),(a,c),(a,d),(b,c),(b,d),(c,d),$
$(a,b,c),(b\,c\,d),(a\,b\,d),(a\,c\,d),(a\,c\,b),(b\,d\,c),$
$(a\,d\,b),(a\,d\,c),(ab)(cd),(ac)(bd),(ad)(bc)$
$(a\,b\,c\,d),(a\,c\,b\,d),(a\,d\,bc),(a\,b\,dc),(a\,c\,d\,b),$
$(a\,d\,c\,b)\}$

$\frac{24\text{阶}}{6\text{阶}}=4\text{个}$

左陪集 $aS_3=\{(a),(ab),(bc),(ac),(abc)\}$

$a\in bH$，$b\in aH \Rightarrow$ 该群里所有元素左乘S_3，均相同 $\Rightarrow$ 一个等价类

$\Rightarrow$只需考虑$\langle S_4, o\rangle - aS_3$的元素左陪集

$(ad)S_3,(bd)S_3,(cd)S_3$

23 找出同余类加群 $\langle \mathbf{Z}_9, \oplus \rangle$ 的全部三阶子群及相应的陪集。

$\langle Z_9, \oplus \rangle = \{[0],[1],[2],[3],[4],[5],[6],[7],[8]\}$

全部3阶子群：$H=\{[0],[1],[8]\}$ ×（$[1]+[1]=[2]$）

$\{[0],[3],[6]\}$ ✓

$\{[0],[2],[7]\}$ ×（$[2]+[2]=[4]$）

$\{[0],[4],[5]\}$ ×（$[4]+[5]=[8]$）不封闭!!!

$\frac{9\text{阶}}{3\text{阶}}=3\text{个}$：$[0]H=H=\{[0],[3],[6]\}$

$[1]H=\{[1],[4],[7]\}$

$[2]H=\{[2],[5],[8]\}$

(1) 群中指数为 2 的子群是正规子群。

指数为2子群 $\Rightarrow$ 陪集元素仅有2个

子群G的陪集分解 $G=eH\cup a_1H=He\cup Ha_1$

$\Rightarrow a_1H=Ha_1 \Rightarrow$ 正规子群

(2) 两个正规子群 S 和 T 的交 $S\cap T$ 仍是正规子群。

$\forall a\in S\cap T$,

$aSa^{-1}\subseteq S$, $aTa^{-1}\subseteq T$

$\Rightarrow a(S\cap T)a^{-1}\subseteq S\cap T$

27 设 f 是群 $\langle G,\cdot\rangle$ 到群 $\langle H,\circ\rangle$ 的同态映射，S 是 G 的子群。证明：$f(S)$ 是 H 的子群。

由S为G子群：$\forall a\in S, b\in S \Rightarrow a\cdot b^{-1}\in S$

由同态映射：$f(a\cdot b^{-1})\in f(S)$

$f(a\cdot b^{-1})=f(a)\circ f(b^{-1})$

$=f(a)\circ f(b)^{-1}\in f(S)$

$\Rightarrow f(S)$为H子群

31 证明：循环群的同态像也是循环群。

对循环群 $G=(a)$, $\forall b\in G$, $b=a^k$, $k\in Z$

存在f，使$f(b)=f(a^k)=[f(a)]^k$

对群H，$\forall f(b)\in H$，$f(b)=[f(a)]^k$，

即 $H=(f(a))$

第16章 环与域

环

定义 16.1 设〈R,+, $*$〉是含有两个二元运算的代数系统。如果满足

①〈R,+〉是交换群;

②〈R, $*$〉是半群;

③$\forall a, b, c \in R$, $a*(b+c)=(a*b)+(a*c)$, $(b+c)*a=(b*a)+(b*c)$;

则称〈R,+, $*$〉是**环**。

举例:

整数环$\langle Z,+,\times\rangle$,有理数环$\langle Q,+,\times\rangle$,实数环$\langle R,+,\times\rangle$

模n剩余类环$\langle Z_n,\oplus,\otimes\rangle$

定理 16.1（**移项法则**） 设〈R,+, $*$〉是环, $a, b, c \in R$, 则下面两条等价:

①$a+b=c$ ②$a+b-c=\theta$

环$\langle R,+,*\rangle$中,$\langle R,+\rangle$的幺元θ,a的逆元$-a$

$\langle R,*\rangle$的幺元e,a的逆元a^{-1}

定理 在环〈R, +, *〉中，运算“+”的幺元θ是运算“*”的零元。

定理 16.2 设〈R,+, $*$〉是环, $a, b, c \in R$, 则

①$a*\theta=\theta*a=\theta$（加法幺元是乘法零元）

②$a*(-b)=-(a*b)=(-a)*b$

③$(-a)*(-b)=a*b$

④$a*(b-c)=(a*b)-(b*c)$ } 分配律

⑤$(b-c)*a=(b*a)-(c*a)$

零因子

定义 16.2 设〈R,+, $*$〉是环, $a, b \in R$。如果$a\neq\theta$且$b\neq\theta$,而$a*b=\theta$,则称a和b是R中的**零因子**。

举例:$\langle Z_6,\oplus,\otimes\rangle$中,$[2]\otimes[3]=[0]$, $[3]\otimes[4]=[0]$

整环

定义 16.3 设〈R,+, $*$〉是环

①如果$*$可交换,则称R为**交换环**。

②如果〈R, $*$〉有幺元,则称R为**含幺环**。

③如果①和②成立且无零因子,则称R为**整环**。

举例：$\langle Z, +, \times\rangle$

$\langle Z, \times\rangle$可交换，幺元1，$a\times b=0 \Leftrightarrow a=0$ or $b=0$无零因子

$\langle Q, +, \times\rangle$，$\langle R, +, \times\rangle$

$\langle Z_n, \oplus, \otimes\rangle$（n为素数）$\Rightarrow$有限整环

定理 16.3 设〈R，+，*〉是环，则 R 中无零因子，当且仅当对任何 a，x，$y\in R$，当 $a\neq 0$ 时，由 $a*x=a*y$，必然得到 $x=y$（或由 $x*a=y*a$ 得到 $x=y$）。

域

1。定义：如果〈R，+，*〉是整环，并且R –{θ}中每元关于运算“*”有逆元，则称该环为域。（非零元）

域中含有2个交换群：$\langle R, +\rangle$，$\langle R-\{0\}, *\rangle$

举例：$\langle Z_7, \oplus, \otimes\rangle$

在$Z_7-\{[0]\}$中，$[1]\otimes[1]=[1]$

$[6]\otimes[6]=[1]$

$[2]\otimes[4]=[1]$

$[3]\otimes[5]=[1]$

$\langle Z_k, \oplus, \otimes\rangle \Rightarrow$有限域

$\langle Q, +, \times\rangle$，$\langle R, +, \times\rangle \Rightarrow$无限域

$\langle Z, +, \times\rangle$是整环，不是域（未必存在逆元）

定理 16.5 有限整环〈R，+，*〉必是域。

子环

定义 16.4 设〈R，+，*〉是环，S 是 R 的非空子集，如果〈S，+，*〉也是环，则称 S 是 R 的子环。

举例：$\langle Z, +, \times\rangle$是$\langle Q, +, \times\rangle$子环

$\langle\{[0],[3],[6],[9]\}, \oplus, \otimes\rangle$是$\langle Z_{12}, \oplus, \otimes\rangle$子环

环中方程求解

例：$\langle Z_9, \oplus, \otimes\rangle$环上的$2x^2-x-1=0$方程解

$x_1=[7]$，$x_2=[1]$，$x_3=[4]$三个解（环中含零因子，故超2个解）

环的同态

定义 16.5 设 $\langle S,+,*\rangle$ 和 $\langle T,\oplus,\otimes\rangle$ 是两个环，$f: S\to T$ 是映射。如果对任意 $a,b\in S$，都有

$$f(a+b)=f(a)\oplus f(b)$$
$$f(a*b)=f(a)\otimes f(b)$$

则称 f 是环 $\langle S,+,*\rangle$ 到环 $\langle T,\oplus,\otimes\rangle$ 的环同态映射，$f(S)$ 为 S 的**同态像**。

定理 设f 是环〈 R，+，*〉到代数系统〈S，⊕，⊗〉的环同态，则〈 f(R)，⊕，⊗〉也是环。

举例：$\langle Z,+,*\rangle \xrightarrow{f} \langle Z_{12},\oplus,\otimes\rangle$

$f: Z\to Z_{12}$　$\forall a\in Z, f(a)=[a]$

总结

环$\langle R,+,*\rangle$ = $\langle R,+\rangle$ 交换群
$\langle R,*\rangle$ 半群
+,*可分配

⇓

整环$\langle R,+,*\rangle$ = $\langle R,+,*\rangle$ 环
*可交换
$\langle R,*\rangle$ 有幺元
无零因子

⇓

域$\langle R,+,*\rangle$ = $\langle R,+,*\rangle$ 整环
R-{0}上"*"均有逆元

Ch16 习题集

2. 在 $\langle \mathbf{Z}_{15}, \oplus, \otimes \rangle$ 中求出满足方程 $x^2-[1]=[0]$ 的全部根。

[1]、[4]、[11]、[14]

3. 设 A 依次为下列数集合，试确定 $\langle A, +, \times \rangle$ 是否成环、整环或域。

(1) $A=\{x \mid x \in \mathbf{Z} \text{ 且 } x \geqslant 0\}$

(2) $A=\{a+b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbf{Q}\}$

(3) $A=\{x \mid (\exists y)[y \in \mathbf{Z} \wedge x=2y]\}$

(4) $A=\{a/b \mid a, b \text{ 为正整数，且 } (a, b)=1\}$

GCD

(1) $\langle A, + \rangle$ 没有逆元 $(x \geq 0)$

(2) $\langle A, + \rangle$ 为交换群

$\langle A, \times \rangle$ 为含幺半群、可交换、有逆元

$+, \times$ 满足分配律

$\Rightarrow$ 环√ 整环√ 域√

(3) $\langle A, + \rangle$ 为交换群

$\langle A, \times \rangle$ 为半群，无幺元

$\Rightarrow$ 环√

(4) $\langle A, + \rangle$ 无幺元、逆元 (a/b 正数)

第17章 格与布尔代数

代数格

定义 17.1 设 $\langle L, \vee, \wedge \rangle$ 是一个代数系统。如果 $\vee$ 和 $\wedge$ 满足

①交换律：$a \vee b = b \vee a$，$a \wedge b = b \wedge a$

②结合律：$a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$，$a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$

③吸收律：$a \vee (b \wedge a) = a$，$a \wedge (a \vee b) = a$

则称 $\langle L, \vee, \wedge \rangle$ 为一个**代数格**。

封闭性、结合性、交换性、吸收性 $\Longrightarrow$ 代数格

举例：幂集格 $\langle 2^A, \cup, \cap \rangle$

$\langle Z_+, lcm, gcd \rangle$ 由于 $a \times b = gcd(a,b) \times lcm(a,b)$

$$lcm(a, gcd(a,b)) = \frac{a \times gcd(a,b)}{gcd(a, gcd(a,b))} = a$$

$$gcd(a, gcd(a,b)) = \frac{a \times gcd(a,b)}{lcm(a, gcd(a,b))} = a$$

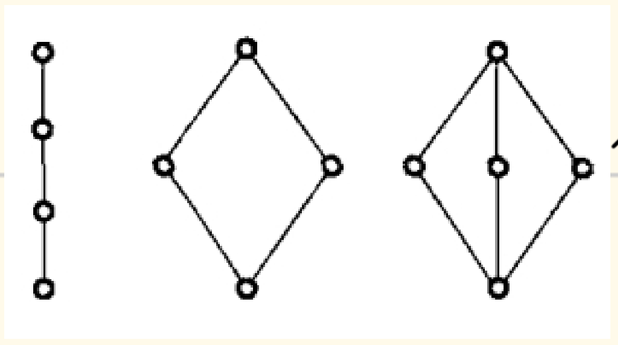
$\langle Z, max, min \rangle$ 其中 $max(a, min(a,b)) = a = min(a, max(a,b))$

定理 17.1 幂等律 设 $\langle L, \vee, \wedge \rangle$ 是一个代数格，$a \in L$，则必有

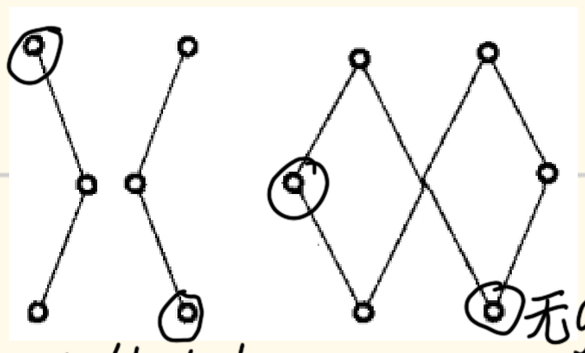
$$a \vee a = a, \quad a \wedge a = a$$

偏序格

定义 17.2 设 $\leqslant$ 是集合 L 上的一个偏序。如果对所有 $a, b \in L$，子集 $\{a, b\}$ 在 L 中都有一个最大下界和一个最小上界，则称 $\langle L, \leqslant \rangle$ 为一个**偏序格**。a 和 b 的最大下界记为 $\mathrm{glb}(a, b)$，最小上界记为 $\mathrm{lub}(a, b)$。



偏序格



非偏序格

无glb

无glb, lub

举例：幂集格 $\langle 2^A, \subseteq \rangle$ $lub(X,Y) = X \cup Y$

$glb(X,Y) = X \cap Y$

$\langle Z_+, | \rangle$ $lub(a,b) = lcm(a,b)$

$glb(a,b) = gcd(a,b)$

$\langle Z, \leqslant \rangle$ $lub(a,b) = max(a,b)$

$glb(a,b) = min(a,b)$

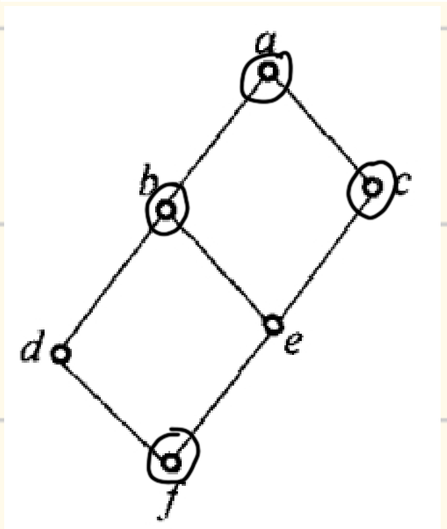
偏序格与代数格等价性

定理 17.3 设〈L,$\preccurlyeq$〉是一个偏序格。在格上定义运算“$\vee$”和“$\wedge$”如下：$a\wedge b=\text{glb}(a,b)$，$a\vee b=\text{lub}(a,b)$，则〈$L$,$\vee$,$\wedge$〉是一个代数格。

定理 17.2 设〈L,$\vee$,$\wedge$〉是一个代数格。定义格上的自然偏序“$\preccurlyeq$”如下：$a\preccurlyeq b$，当且仅当$a\wedge b=a$，则〈L,$\preccurlyeq$〉是一个偏序格。

子格

定义 17.3 设〈L，$\vee$，$\wedge$〉是格，S是L的非空子集。如果对任何a，$b\in S$，$a\wedge b$与$a\vee b$都在S中，则称S是L的**子格**，记为〈S，$\vee$，$\wedge$〉。



原格中，$glb(b,c)=e$

“子格”中，$glb(b,c)=f$

$\Rightarrow$很子格

格的运算性质

定理 17.5 设〈L，$\vee$，$\wedge$〉为格，$\preccurlyeq$是对应的偏序，a，b，c，$d\in L$，则

①$a\preccurlyeq b\Rightarrow a\vee c\preccurlyeq b\vee c$　　②$a\preccurlyeq b\Rightarrow a\wedge c\preccurlyeq b\wedge c$

③$a\preccurlyeq b$，$c\preccurlyeq d\Rightarrow a\wedge c\preccurlyeq b\wedge d$　　④$a\preccurlyeq b$，$c\preccurlyeq d\Rightarrow a\vee c\preccurlyeq b\vee d$

⑤$a\preccurlyeq b$，$a\preccurlyeq c\Rightarrow a\preccurlyeq b\wedge c$　　⑥$a\preccurlyeq c$，$b\preccurlyeq c\Rightarrow a\vee b\preccurlyeq c$

定理 17.6 设〈L，$\vee$，$\wedge$〉为格，$\preccurlyeq$是对应的偏序，a，b，c，$d\in L$，则

① $a\vee(b\wedge c)\preccurlyeq(a\vee b)\wedge(a\vee c)$

② $(a\wedge b)\vee(a\wedge c)\preccurlyeq a\wedge(b\vee c)$

(注分配关系)

$(\cdots\vee\cdots\preccurlyeq\cdots\wedge\cdots)$

对偶格

定义 17.4 设〈L，$\preccurlyeq$〉和〈L，$\preccurlyeq'$〉是两个偏序格，如果偏序关系$\preccurlyeq'$是$\preccurlyeq$的逆关系，则称这两个偏序格是**互为对偶的格**。

$a\preccurlyeq b\Rightarrow b\preccurlyeq' a$

定义 17.5 设〈L，$\vee$，$\wedge$〉是一个格，E是格中的一个公式。将E中的0和1互换，$\vee$和$\wedge$互换后得到的新公式E^*称为E的**对偶公式**。

如$a\wedge(b\vee c)\leftrightarrow a\vee(b\wedge c)$

对偶原理 设X和Y是格〈L，$\vee$，$\wedge$〉上的两个公式，X^*和Y^*是相对应的对偶公式。如果$X=Y$，那么$X^*=Y^*$。

定理 17.4 设X和Y是格〈L，$\vee$，$\wedge$〉上的两个公式，$\preccurlyeq$是对应的偏序。如果$X\preccurlyeq Y$，则必$Y^*\preccurlyeq X^*$。

格的同态

定义 17.6 设〈L，$\vee$，$\wedge$〉和〈P，$\oplus$，$\otimes$〉是两个格，f是L到P的映射。如果对任何a，$b\in L$，有

$$f(a\vee b)=f(a)\oplus f(b)$$
$$f(a\wedge b)=f(a)\otimes f(b)$$

则称f是从格〈L，$\vee$，$\wedge$〉到〈P，$\oplus$，$\otimes$〉的**格同态**；特别地，当f是双射时，称为**格同构**。

定理 17.7（保序定理） f 是从格 $\langle L, \vee, \wedge\rangle$ 到格 $\langle P, \oplus, \otimes\rangle$ 的同态，两个格上的偏序分别是 $\preccurlyeq$ 和 $\subseteq$。对 $a, b \in L$，如果 $a \preccurlyeq b$，则必然 $f(a) \subseteq f(b)$。

分配格

定义 17.7 设 $\langle L, \vee, \wedge\rangle$ 是格，如果对任意 $a, b, c, d \in L$ 都使

① $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

② $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$

则称 $\langle L, \vee, \wedge\rangle$ 为**分配格**。

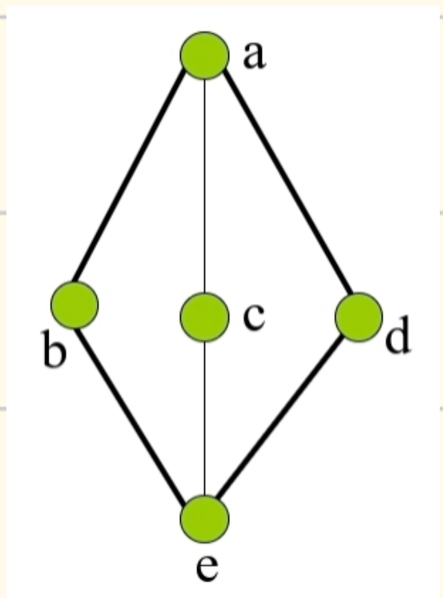
举例：$\langle Z, max, min\rangle$

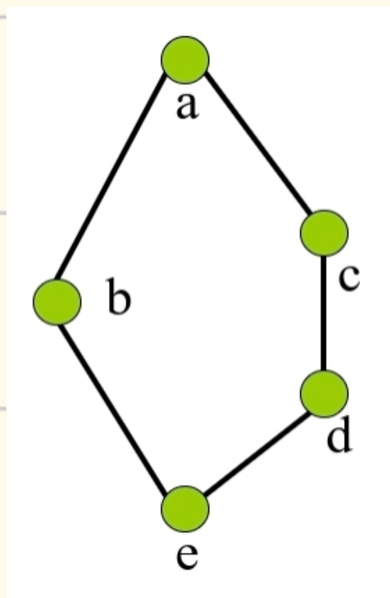
$\langle 2^A, \cup, \cap\rangle$

$\langle Dn, lcm, gcm\rangle$，$Dn$ 为 $n \in N^*$ 的正因子构成的集合

典型的非分配格

5阶禁格





定理 17.9 设 $\langle L, \vee, \wedge\rangle$ 是一个分配格，$a, b, c \in L$。如果 $a \vee b = a \vee c$ 且 $a \wedge b = a \wedge c$，则 $b = c$。（消去律）

有界格

定义 17.8 如果格 $\langle L, \vee, \wedge\rangle$ 中存在最大元和最小元，则称 $\langle L, \vee, \wedge\rangle$ 是**有界格**。

有限格一定是有界格，但有界格不一定是有限格。

举例：$\langle 2^S, \cup, \cap\rangle$ 最大 S，最小 $\varnothing$

$\langle Dn, lcm, gcd\rangle$ 最大 n，最小 1

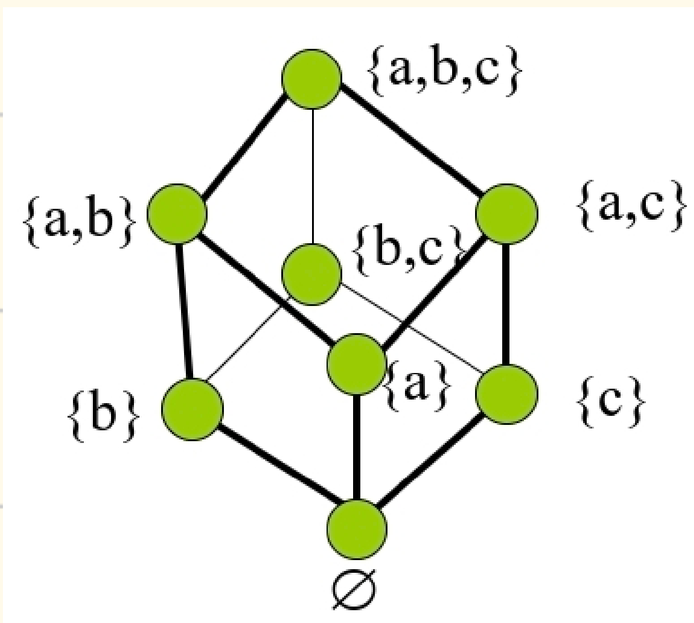
5阶禁格

定义 17.9 设 $\langle L, \vee, \wedge\rangle$ 是以 1 为最大元、以 0 为最小元的有界格。如果对于 $a \in L$，存在 $b \in L$ 使 $a \vee b = 1$ 且 $a \wedge b = 0$，则称 a 和 b 是**互补的元素**。a 的**补元**可以用 $\bar{a}$ 来表示。

$\overline{a \vee b}$ 最小界　$\overline{a \wedge b}$ 最大界

{a, b, c} 和 ∅互补；　{a, b} 和 {c}互补；

{a, c} 和 {b}互补；　{b, c} 和 {a}互补.



有补格

定义 17.10 每个元素都存在补元的有界格，叫做**有补格**。

举例：有补格{幂集格$\langle 2^{\{a,b,c\}}, \cup, \cap\rangle$
5点格

非有补格{因子格$\langle D_{12}, lcm, gcd\rangle$
全序格$\langle \{1,2,3,4,5\}, \leqslant\rangle$

有补分配格：满足分配性和有补性的格。也称布尔代数

举例：$\langle 2^A, \cup, \cap\rangle$ $\langle B, \vee, \wedge, \bar{}, 0, 1\rangle$

定理 17.10 在有补分配格中每个元的补元是唯一的。

定理 17.11 在有补分配格$\langle L, \vee, \wedge\rangle$中，有

①$\overline{a \vee b} = \bar{a} \wedge \bar{b}$ ②$\overline{a \wedge b} = \bar{a} \vee \bar{b}$ (德摩根定律)

推论 17.16.1 任何n个原子的有限布尔代数$\langle B, \vee, \wedge, ^-, 0, 1\rangle$都和$n$元集$S$对应的幂集代数$\langle 2^S, \cup, \cap, ^-, \varnothing, S\rangle$同构，从而具有$n$个原子的布尔代数共有个$2^n$元素。

总结

偏序格：任意$\{a,b\}$在L均有最小上界、最大下界

代数格：$\wedge, \vee$满足交换律、结合律、吸收律

对偶格：偏序关系互逆

分配格：$\wedge, \vee$互相可分配

有界格：存在最大、最小元

有补格：$\forall a \in L$，均存在$\bar{a} \in L$且$a \vee \bar{a}$=最大元
$a \wedge \bar{a}$=最小元

布尔代数：有补分配格

非分配格：五点格

非有补格：因子格全序格

布尔代数：$\langle 2^S, \cup, \cap\rangle$

Ch16 习题集

3. 在〈L，$\vee$，$\wedge$〉上定义偏序"$\preccurlyeq$"为 $a \preccurlyeq b$ 当且仅当 $a \wedge b = a$，可使〈L，$\preccurlyeq$〉成为偏序格。

证明：这个偏序也可以等价地定义为 $a \preccurlyeq b$，当且仅当 $a \vee b = b$。

由 $a \wedge b = a$ 消法律

$\Rightarrow a \vee b = (a \wedge b) \vee b = b$

故 $a \wedge b = a \Leftrightarrow a \vee b = b$

(2) $(a \wedge b) \vee (b \wedge c) \vee (c \wedge a) \preccurlyeq (a \vee b) \wedge (b \vee c) \wedge (c \vee a)$

$a \leq a \vee b, a \leq a \vee c$

$\Rightarrow a \wedge a = a \leq (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

同理，$b \leq (b \vee a) \wedge (b \vee c)$

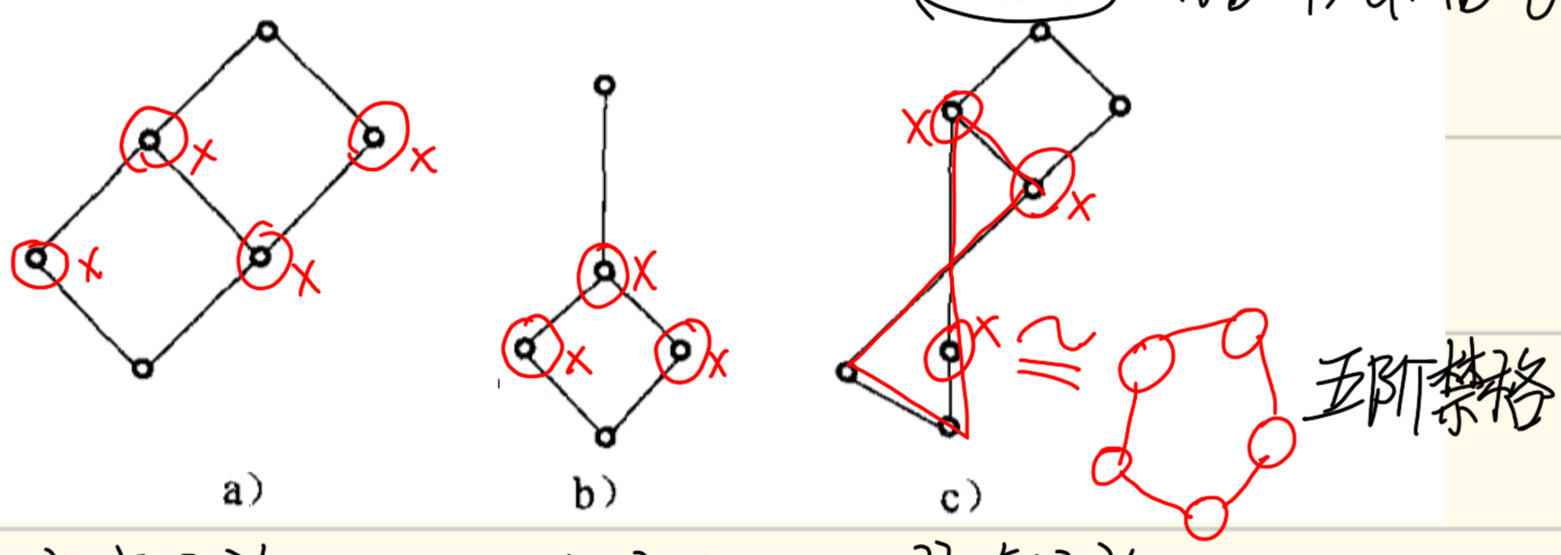
$c \leq (c \vee a) \wedge (c \vee b)$

即 $(a \wedge b) \leq (a \vee b) \wedge (b \vee c) \wedge (c \vee a)$

$(b \wedge c) \leq (b \vee c) \wedge (a \vee c) \wedge (a \vee b)$

$(c \wedge a) \leq (a \vee c) \wedge (a \vee b) \wedge (b \vee c)$

10. 确定图 17-6 各 Hasse 图对应的格中哪些是分配格，哪些是有补格。$a \vee b = 1, a \wedge b = 0$



五阶禁格

非有补格 分配格

非有补格 分配格

非有补格 非分配格

21-22

4、设 R1、R2 都是集合 A 上的等价关系，下列关系中**不是** A 上的等价关系的是(　　)。

A. $(A\times A)-R1$　　B. $R1\cap R2$　　C. $r(R1-R2)$　　D. $R1-R2$　　E. $R2-R1$

∪：传递 ×

－：传递、自反 ×

∘：传递、对称 ×

⇓

不满足传递性

3、设 $S=\{1, 2, 3\}$ 定义 $S\times S$ 上的等价关系 $R=\{\langle\langle a,b\rangle,\langle c,d\rangle\rangle \mid \langle a,b\rangle,\langle c,d\rangle\in S\times S, a+d=b+c\}$ 则由 R 产生的 $S\times S$ 上一个划分共有＿＿＿＿个分块。

16

<1 1><2 2>
<1 2><1 2>
<1 3><1 3>
<1 1><3 3>
<1 2><2 3>

<2 1><2 1>
<2 2><1 1>
<2 3><2 3>
<2 2><3 3>

<3 1><3 1>
<3 3><1 1>
<3 2><2 1>
<3 2><3 2>
<3 3><2 2>

<2 1> ← <3 2>

<2 2> ⇄ <3 3>
<2 2> → <1 1>
<3 3> → <1 1>

<1 2> → <2 3>

<3 1>　　<1 3>

1、R 是集合 X 上的一个自反关系，求证：R 是对称和传递的，当且仅当<a, b> 和<a, c>在 R 中有<b, c>在 R 中。

⇒：若R对称、传递，$\langle a,b\rangle\in R$，$\langle a,c\rangle\in R$，则
$\langle b,a\rangle\in R$，由于$\langle b,a\rangle,\langle a,c\rangle\in R$，故$\langle b,c\rangle\in R$

⇐：若$\langle a,b\rangle,\langle a,c\rangle\in R$，则$\langle b,c\rangle\in R$，令 $c=a$
即若$\langle a,b\rangle,\langle a,a\rangle\in R$，则$\langle b,a\rangle\in R$，对称
由$\langle a,c\rangle,\langle b,a\rangle\in R$，$\langle b,c\rangle\in R$，传递

20-21

② 下列谓词公式中不是前束范式的是（　　）

① $(\forall x)\neg(\exists x)(F(x)\wedge G(x))$　　② $(\forall x)(\forall y)(F(x)\vee G(y))$

③ $(\forall x)(\exists y)(P(x)\rightarrow Q(x,y))$　　④ $(\forall x)(P(x)\rightarrow(\exists y)Q(x,y))$

$\forall x_1\exists x_2\forall x_3\exists x_4\cdots G$，G为不含量词的命题

10、设 Z，Q，R 分别是整数集，有理数集，实数集，下列代数系统中，不构成域的是（　　）。（其中+、×是普通数的加法、乘法）

① (Z，+，×)　　② $(Z_p$，⊕，⊗）（其中 p 是素数）

③ (Q，+，×)　　④ (R，+，×)

5无逆元1/5

<S，+，*>为域；<S，+>交换群

<S-{0}，*>交换群

3、下列环中是域的是（　　）。（其中 S 是全体偶数的集合）

① (Z，+，×)　　② $(z_6,\oplus,\otimes)$　　③ $(z_3,\oplus,\otimes)$　　④ (S，+，×)

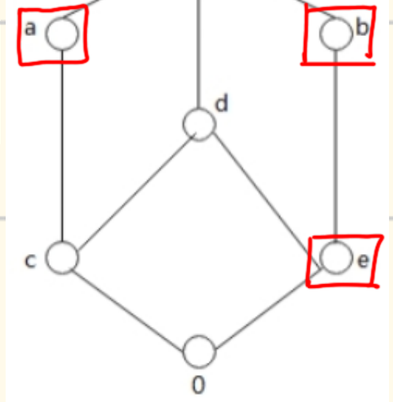
5无逆元1/5

<Zk，⊕，⊗>是域（k为素数）

6无逆元1/6

无幺元1

5、右图所示格中，$\bar{a}=$ b,e ；$\bar{b}=$ a,c 。



注意补元不止一个!!!

3.（7 分）证明：具有 7 个结点、15 条边的简单连通平面图，它的面的度数都是 3。

n-m+f=2，f=10

$\sum d(f_i)=2m=30$　但一个面至少3条边围成 $d(f_i)\geq 3$

$\sum d(f_i)\geq 30\Rightarrow d(f_i)\equiv 3$

19-20

13、设有代数系统$(R^*, \times)$，其中R^*为非零实数，×是普通乘法，则下列映射中（ ② ）不是自同态。

① $f(x)=|x|$　② $f(x)=x+1$　③ $f(x)=x^2$　④ $f(x)=1/x$

同态$\langle R_1,*\rangle \sim \langle R_2,\circ\rangle \Leftrightarrow f(x_1 * x_2)=f(x_1)\circ f(x_2)$

15、12 阶循环群有（ 6 ）个不同的子群。

① 3　② 6　③ 9　④ 12

循环群的子群仍是循环群

$G=\{e,a,a^2,a^3,\cdots,a^{11}\}$，子群生成元 e,a,a^2,a^3,a^4,a^6（阶数为12因子）

子群 $G_1=\{e\}$

$G_2=\{e,a^6\}$

$G_3=\{e,a^4,a^8\}$

$G_4=\{e,a^3,a^6,a^9\}$

$G_5=\{e,a^2,a^4,a^6,a^8,a^{10}\}$

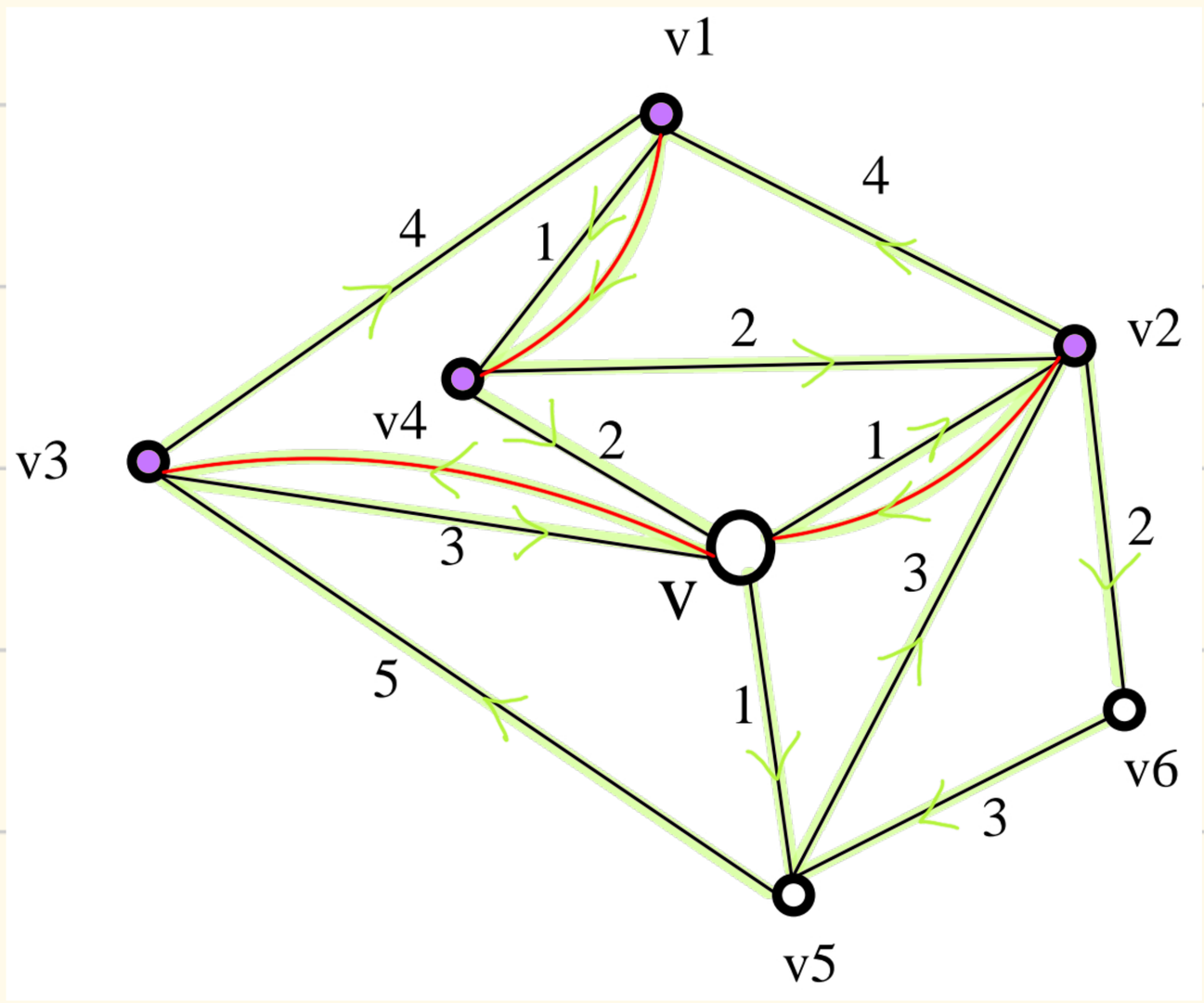
$G_6=G$

一个快递员每天所负责的投递区域如下图所示，图中每条边代表一条街道，权为街道的长度，快递员每天从快递站 v 出发，将所负责区域的街道走完一遍再回到快递站，请为快递员规划一条路径使得他所走的总里程数最少。

奇度结点 $d(v_1v_4)+d(v_2v_3)=5$ ✓

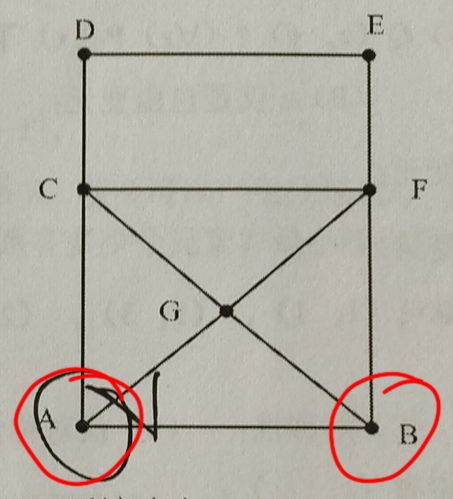
$d(v_1v_3)+d(v_2v_4)=6$

$d(v_1v_2)+d(v_3v_4)=9$



18-19

11. 如下图所示，洒水车从 A 点出发执行洒水任务。请问是否存在一条洒水路线使洒水车从 A 点出发通过所有街道且不重复，并且最后回到车库 B。以下选项中说法正确的是（ B ）：



A→B：不是欧拉回路
是欧拉道路：至多2个奇度结点

（A）不存在；（B）存在；（C）无法确定；（D）以上选项都不正确

以下选项中不是整环的是（ ）：

（A）〈 Z ， +， ×〉；　（B）〈Q， +， ×〉；　（C）〈Z_{10}, ⊕, ⊗〉；　（D）以上均不对。

[2]⊗[5]=[0]含零因子

下列哪个偏序集构成有界格（ ）：

(A) 〈N, ≤〉 ；　(B) 〈Z, ≥〉；

(C) 〈{2, 3, 4, 6, 12}, |〉；不构成格

(D) 〈P(A), ⊆〉。有限全序集→链状哈氏图→有界格

关于公式（∀x）R（x,y）∧（∃y）Q（z，y）↑（∀z）P（x）下列说法中（ ）是正确的：

（A）x 仅是约束变元；　（B）z 仅是自由变元；

（C）x 既是约束变元又是自由变元；

（D）y 既是约束变元也是自由变元。

虽然(∀z)P(x)实际没有z，但z仍为约束变元

3.（8 分）设 A={a, b, c, d, e, f}，

(1) 写出 A 上的一个等价关系 R，使 R 可以产生分划{{a, b}, {c}, {d, e, f}}.

(2) 决定 A 上的最大等价关系有多少个元素？最小等价关系有多少个元素？

$R=\{\langle a,a\rangle,\langle b$

(1) 分划 → 全关系 → 等价关系

$R=\{a,b\}\times\{a,b\}\cup\{c\}\times\{c\}\cup$
$\{d,e,f\}\times\{d,e,f\}$

(2) 最多：$A\times A$　共 $6^2=36$ 个元素

最少：I_A　共 6 个元素

3.（6 分）设 $G=(V,E)$ 是简单连通图，$T_1=(V,E_1)$ 和 $T_2=(V,E_2)$ 都是 G 的生成树，且 $E_1 \oplus E_2 = E$

证明：G 中无割边.

若G存在割边e，则 $e \in E_1$，$e \in E_2$

$e \notin E_1 \oplus E_2$，与 $e \in E_1 \oplus E_2 = E$ 矛盾

4.（7 分）设 $<G,\circ>$ 是群，$x,y \in G$，k 是一个正整数. 证明：$(x^{-1}\circ y\circ x)^k = x^{-1}\circ y\circ x$ 的充分必要条件是 $y^k = y$.

$(x^{-1}\circ y\circ x)^k = x^{-1}\circ y\circ x\circ x^{-1}\circ y\circ x\circ\cdots\circ x^{-1}\circ y\circ x$

$= x^{-1}\circ y^k\circ x$

17-18

15、下面是布尔代数的是（ A ）

（A）幂集格$\langle 2^A, \cup, \cap \rangle$　　（B）因子格$\langle D_{12}, lcm, gcd \rangle$

（C）全序格$\langle \{1, 2, 3, 4, 5\}, \leq \rangle$　　（D）5 点格

有补分配格：$\langle 2^S, \cup, \cap \rangle$

非有补格：全序格、因子格

非分配格：5点格

3、以下说法正确的是（ ）。

(A)有限偏序集总存在极大元和极小元；

(B)全序集一定是良序集；

(C)一个偏序关系的哈斯图和其逆关系的哈斯图是相互颠倒的；

(D)以上说法都不对。

全序集+有限 → 良序集

16-17

13、〈G, *〉是7阶群，则G有（④）个生成元

① 2　② 4　③ 5　④ 6

生成元：找阶数n互质的数

循环子群：找n的正因子（含1不含n）

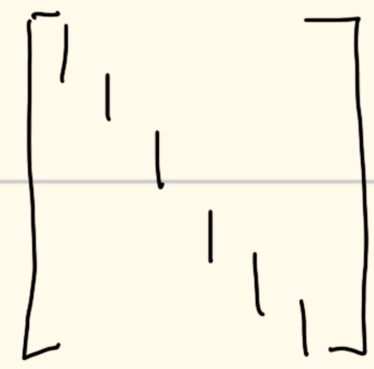
与7互质：1,2,3,4,5,6 ⇒6个

6、设集合A={1，2，3,4}，则A上自反关系数目为（②）

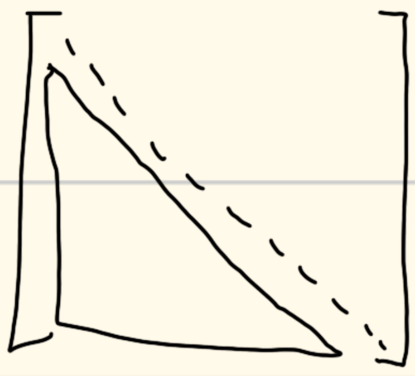
① 512　② 4096　③ 2048　④ 1024

自反：2^{n^2-n}

对称：$2^n \cdot 2^{\frac{n^2-n}{2}}$



其余n^2-n个任为1或0 ⇒自反



主对角线任为1或0

左下半任为1或0，右上与其对称 ⇒对称

1、$A\times A=\{(1,2),(1,1),(2,2),(2,1)\}$

A^A上共有4个函数(单值、处处有定义)

$f_1=\{(1,2)\ (2,2)\}$ $f_2=\{(1,2)\ (2,1)\}$ $f_3=\{(1,1)\ (2,2)\}$ $f_4=\{(1,1)\ (2,1)\}$

∘	f_1	f_2	f_3	f_4
f_1	f_1	f_1	f_1	f_1
f_2	f_4	f_3	f_2	f_1
f_3	f_1	f_2	f_3	f_4
f_4	f_4	f_4	f_4	f_4

(f_3为幺元)

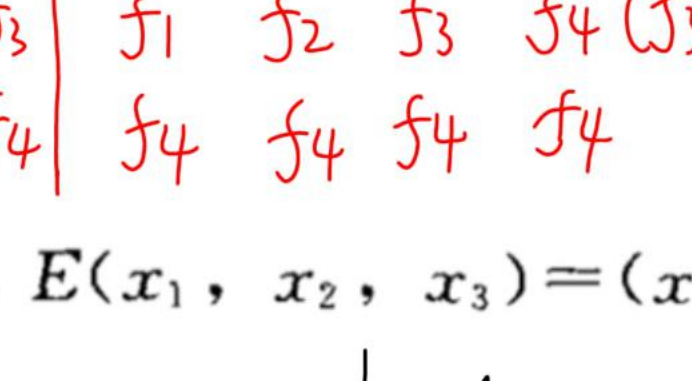
有逆元：f_2，f_3

2、$E(x_1, x_2, x_3)=(x_1\wedge\overline{x}_2)\vee(x_2\wedge\overline{x}_3)\vee(\overline{x}_1\wedge x_3)$

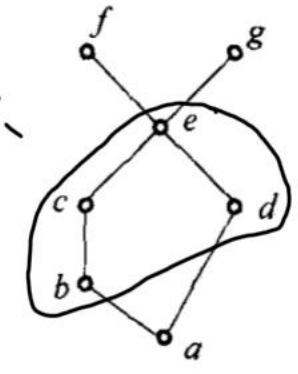
X_1	X_2	X_3	$X_1\wedge\overline{X}_2$	$X_2\wedge\overline{X}_3$	$\overline{X}_1\wedge X_3$	E
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	1	1
0	1	0	0	1	0	1
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0	1
1	0	1	1	0	0	1
1	1	0	0	1	0	1
1	1	1	0	0	0	0

主析取范式$=\overline{X}_1\wedge\overline{X}_2\wedge X_3\vee\overline{X}_1\wedge X_2\wedge\overline{X}_3\vee\overline{X}_1\wedge X_2\wedge X_3\vee$
$X_1\wedge\overline{X}_2\wedge\overline{X}_3\vee X_1\wedge\overline{X}_2\wedge X_3\vee X_1\wedge X_2\wedge\overline{X}_3$

主合取范式$=(\overline{X}_1\vee\overline{X}_2\vee\overline{X}_3)\wedge(X_1\vee X_2\vee X_3)$

3、 

$V_1V_7<V_3V_4<V_2V_7<V_3V_7<V_2V_3<V_4V_7$
$<V_4V_5<V_1V_2<V_1V_6<V_5V_7<V_5V_6<V_6V_7$

4、 

极大：e　　最大：e
极小：b, d　　最小：无
最小上界：e
最大下界：a

5、$r(\rho)=\rho\cup I_A=\{\langle a,a\rangle,\langle b,b\rangle,\langle c,c\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,b\rangle\}$

$s(\rho)=\rho^{-1}\cup\rho=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,b\rangle\}$

$M_\rho=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$ $M_{t(\rho)}=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&1&1\end{bmatrix}$

1、$(P\to(Q\to S))\wedge(\neg R\vee P)\wedge Q\Rightarrow R\to S$

(1) R　P(附加)
(2) ¬R∨P　P
(3) P　TI(1)(2)
(4) P→(Q→S)　P
(5) Q→S　TI(4)(3)
(6) Q　P
(7) S　TI(5)(6)
证毕

2、$\forall a\in A,\langle a,a\rangle\in R$ 且 $\langle a,a\rangle\in S$，故 $\langle a,a\rangle\in R\cap S$，$R\cap S$自反

$\forall a,b\in A,\langle a,b\rangle\in R,\langle b,a\rangle\in R,\langle a,b\rangle\in S,\langle b,a\rangle\in S$，故 $\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle$ 均$\in R\cap S$，$R\cap S$对称

$\forall a,b\in A$，由 $\langle a,b\rangle,\langle b,c\rangle\in R$ 知 $\exists c\in A$，使 $\langle a,c\rangle\in R$，由 $\langle a,b\rangle,\langle b,c\rangle\in S$ 知 $\langle a,c\rangle\in S$，故 $\langle a,c\rangle\in R\cap S$，$R\cap S$传递

$\Rightarrow R\cap S$为A上的等价关系

3、若两奇度结点不连通，则将G分为两支 G_1,G_2，对每一支，均有 $\sum_v d(u_i)=2m$ 为偶数，因每支仅有1个奇度结点，$\sum_v d(u_i)$ 必为奇数，矛盾

②$F(y)\rightarrow G(y)$ US①

③$\exists xF(x)$ P

④$F(y)$ ES③

⑤$G(y)$ T②④I

⑥$\exists xG(x)$ EG⑤

A. ② B. ④ C. ⑤ D. ⑥

12. 下列命题公式为重言式的是（ ）。

A. $p\rightarrow(p\vee q)$ B. $(p\vee\neg p)\rightarrow q$ C. $q\wedge\neg q$ D. $p\rightarrow\neg q$

13. 下列语句中是真命题的是（ ）。

A. 我正在说谎。 B. 严禁吸烟。

C. 如果1+2=5，那么雪是黑的。 D. 如果1+2=3，那么雪是黑的。

14. 设 p：我很累，q：我去学习，命题："除非我很累，否则我就去学习"的符号化正确的是（ ）。

A. $\neg p\wedge q$ B. $\neg p\rightarrow q$ C. $\neg p\rightarrow\neg q$ D. $p\rightarrow\neg q$

15. 设 $A=\{1, 2, 3\}$，A 上二元关系 $S=\{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 3, 2\rangle, \langle 3, 3\rangle\}$，则 S 是（ ）。

A. 自反关系 B. 反自反关系 C. 对称关系 D. 传递关系

二、多项选择题（本大题共5小题，每题2分，共10分）在每小题列出的五个备选项中有二至五个是符合题目要求的，请将其代码填写在题后的括号内。错选、多选、少选或未选均无分。

1. 下面在集合论和逻辑学中正确的公式有（ ）。

A. $P\wedge\sim P\Rightarrow R\wedge Q$ B. $R\rightarrow Q\Rightarrow P\vee\sim P$

C. $2^A\cup 2^B=2^{A\cup B}$ D. $A\oplus B=A\oplus C\Rightarrow B=C$

2. 设有如下命题

①如果地上有水，则天上下雨。

②如果天上下雨，则地上有水。

③如果地上没有水，则天上不下雨。

④如果天上不下雨，则地上没有水。

哪些命题等价的（ ）。

A. ①与②等价 B. ①与④等价 C. ①与③等价 D. ②与③等价

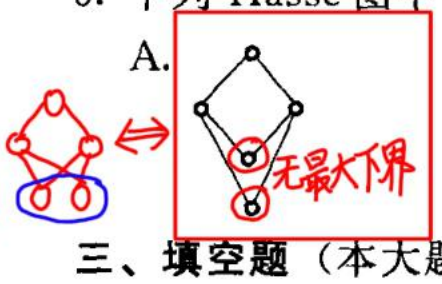
3. $G=\{0, 1, 2, \cdots, n\}$，$n\in\mathbf{N}$，定义⊕为模 n 加法，即 $x\oplus y=(x+y)\bmod n$，则代数系统 $(G, \oplus)$（ ）。

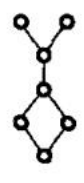
A. 是循环群 B. 是交换群 C. 是半群但不是群 D. 是无限群

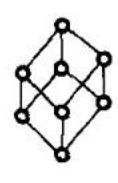
4. 设 G 是一个35阶群，$a\in G$，则 a 的周期不可能是（ ）。

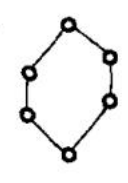
A. 1 B. 2 C. 3 D. 4 E. 5

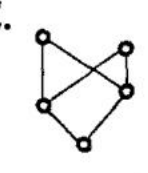
5. 下列 Hasse 图中，是格的有（ ）。

A. 

B. 

C. 

D. 

E. 

三、填空题（本大题共5小题，每题2分，共10分）

1. 设 $A=\{2, a, \{3\}, 4\}$，$B=\{\{a\}, 3, 4, 1\}$ 请在下列每对集合中填入适当的符号：$\{a\}$

(1)_____ B，(2) $\{a, 4, \{3\}\}$ (2)_____ A。

2. 设 $A=\{0, 1\}$，$\mathbf{N}$ 为自然数集，

$$f(x)=\begin{cases}0 & x \text{ 是奇数}\\ 1 & x \text{ 是偶数}\end{cases}$$

若 $f: A\to A$，则 f 是(1)_____射的；若 $f: \mathbf{N}\to A$，则 f 是(2)_____射的。

3. 设图 $G=\langle V, E\rangle$ 中有 7 个结点，各结点的次数分别为 2，4，4，6，5，5，2，则 G 中有(1)_____条边，根据(2)_____。

4. 两个重言式的析取是(1)_____，一个重言式和一个矛盾式的合是(2)_____。

5. 设个体域为自然数集，命题“不存在最大自然数”符号化为_____。

四、演算题（本大题共 5 小题，每题 7 分，共 35 分）

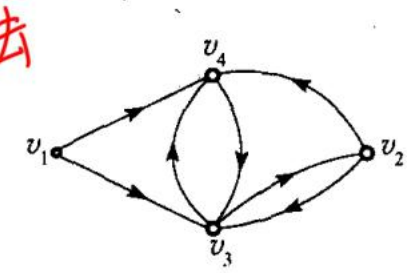
1. 设集合 $A=\{a, b, c\}$，A 上的关系

$$R_1=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle a,c\rangle,\langle b,b\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,c\rangle\}$$

$$R_2=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,b\rangle,\langle c,c\rangle\}$$

计算 $R_1\cap R_2$，$R_1\circ R_2$，R_1^{-1}，$r(R_1)$，$s(R_1)$，$t(R_1)$。Wallshall算法

2. 有向图 G 如右图所示，试求：



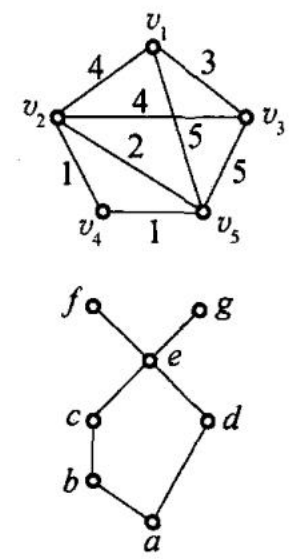
邻接：边→边　关联：点→边

(1) 求 G 的邻接矩阵 A。

(2) 求出可达矩阵 P。$P=\text{WallShall}(A)$

(3) 所有强分图。POP

3. 右图给出的赋权图表示 5 个城市 v_1，v_2，v_3，v_4，v_5 及对应两城镇间公路的长度。试给出一个最优化的设计方案使得各城市间能够有公路连通。



4. 已知有如图的偏序关系，并求出其子集 $A=\{b, c, d, e\}$ 的极大元、极小元、最大元、最小元、最小上界和最大下界。

5. 已知 $G=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$，$\times_7$ 为模 7 乘法。试说明 $\langle G, \times_7\rangle$ 是否构成群？是否为循环群？若是，生成元是什么？

五、证明题（本题共 3 小题，每题 10 分，共 30 分）

1. 证明：$\forall x(P(x)\vee Q(x))$，$\forall x\neg P(x)\Rightarrow \exists xQ(x)$。

2. 证明：$\pi=\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$ 是集合 A 的一个划分，定义

$$R=\{\langle a,b\rangle \mid a,b\in A_i, i=1,2,\cdots,n\}$$

则 R 是 A 上的等价关系。

3. 证明：设 $\langle R, *\rangle$ 是一个代数系统，$*$ 是 R 上的二元运算，即对

$$\forall a,b\in R, a*b=a+b+a\cdot b$$

$+$，$\cdot$ 是普通加法和乘法运算，则 0 是幺元且 $\langle R, *\rangle$ 是含幺半群。

离散数学模拟试题Ⅲ

一、单项选择题（本大题共 15 小题，每题 1 分，共 15 分）在每小题列出的四个备选项中只有一个是符合题目要求的，请将其代码填写在题后的括号内。错选、多选或未选均无分。

1. 下列命题公式是永真式的是（　　）。

A. $(P\wedge\sim P)\leftrightarrow Q$　　B. $(\sim(P\to Q)\wedge Q)\to Q$

C. $(P\to Q)\vee Q$　　D. $(P\vee P)\wedge(P\to\sim P)$

2. 命题公式 A 不存在主合取范式，则 A 是（　　）。

A. 矛盾式　　B. 可满足式　　C. 永真式　　D. 都不对

3. 谓词公式 $(\forall x)P(X) \rightarrow (\exists x)P(X)$ 是（　　）。

A. 可满足式　　B. 矛盾式　　C. 无法判别　　D. 永真式

4. 公式 $(\forall x)(\exists y)(P(x, y) \wedge Q(z)) \rightarrow R(x)$ 中的 x（　　）。

A. 仅是约束变元　　B. 仅是自由变元

C. 既是约束变元又是自由变元　　D. 既不是约束变元也不是自由变元

5. 设 A，B，C 是集合，下列四个命题中，（　　）在任何情况下都是正确的。

A. 若 $A \subseteq B$ 且 $B \in C$，则 $A \in C$　　B. 若 $A \subseteq B$ 且 $B \in C$，则 $A \subseteq C$

C. 若 $A \in B$ 且 $B \subseteq C$，则 $A \subseteq C$　　D. 若 $A \in B$ 且 $B \subseteq C$，则 $A \in C$

6. 下面的表达哪个不正确。（　　）

A. $\{a\} \subseteq \{\{a\}\}$　　B. $\{a\} \in \{\{a\}\}$　　C. $\{a\} \subseteq \{a, \{a\}\}$　　D. $\{a\} \in \{a, \{a\}\}$

7. 若集合 A 中共有 n 个元素，那么 A 上不同二元关系的个数为（　　）。

A. n^2　　B. 2^{n^2}　　C. 2^{n^2-1}　　D. 都不对

8. 下列判断正确的是（　　）。

A. 若 R，S 是自反的，则 $R-S$ 是自反的　　B. 若 R，S 是对称的，则 $R \bigcirc S$ 是对称的

C. 若 R，S 是传递的，则 $R \cap S$ 是传递的　　D. 若 R，S 是传递的，则 $R \cup S$ 是传递的

9. 设 R，S 是非空集合上的等价关系，则 $R \cup S$ 是（　　）。

A. 一定具有自反性，但不一定保持对称性　　B. 一定具有对称性，但不一定保持自反性

C. 一定具有自反性和对称性　　D. 是等价关系

10. 在 5 个元素的集合上可以定义的单射数目为（　　）。

A. 5　　B. 10　　C. 60　　D. 120

11. 设函数 $f: X \rightarrow Y$；X，Y 是有限集合，f 是单射，那么下列关系一定不成立的是（　　）。

A. $|X| = |Y|$　　B. $|X| > |Y|$　　C. $|X| < |Y|$　　D. $X \in Y$

12. 平面非连通图 G，$n-m+f$ 的值为（　　）。

A. 2　　B. $\omega(G)$　　C. $\omega(G)+1$　　D. 3

非连通：$n-m+f=W(G)+1$

13. 若一棵树 $G(n, n-1)$ 只有两个叶结点，则（　　）不正确。

A. 不包含点度大于等于 3 的枝点　　B. 结点总度数大于等于 4

C. 最少包含 2 个结点　　D. 结点总度数 $=2+2(n-2)$

$m \leqslant 3n-6$

14. 设 10 阶简单连通图有 32 条边，则最少要去掉（　　）条边才能使其成为平面图。

A. 10　　B. 12　　C. 32　　D. 8

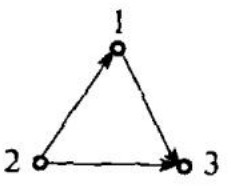
15. 下列代数系统 $\langle S, * \rangle$ 中，哪个是群？（　　）

A. $S=\{0, 1, 3, 5\}$，$*$ 是模 7 加法　　B. $S=\mathbf{Q}$（有理数集合），$*$ 是一般乘法

C. $S=\mathbf{Z}$（整数集合），$*$ 是一般减法　　D. $S=\{1, 3, 4, 5, 9\}$，$*$ 是模 11 乘法

二、多项选择题（本大题共 5 小题，每题 2 分，共 10 分）在每小题列出的五个备选项中有二至五个是符合题目要求的，请将其代码填写在题后的括号内。错选、多选、少选或未选均无分。

1. 设 $A=\{1, 2, 3\}$，则右图所示 A 上的关系具有（　　）。



A. 自反性　　B. 反自反性　　C. 对称性

D. 反对称性　　E. 传递性

2. 设 $A=\{a\}$，$B=\{a,\{a\}\}$，则（　　）。

A. $A\in B$　　B. $A\subseteq B$　　C. $\{A\}\in B$

D. $\{A\}\subseteq B$　　E. $\{A\}\subseteq\{B\}$

3. 下列命题公式中，（　　）在解释 $\{\sim P, Q, \sim R\}$ 下为真。

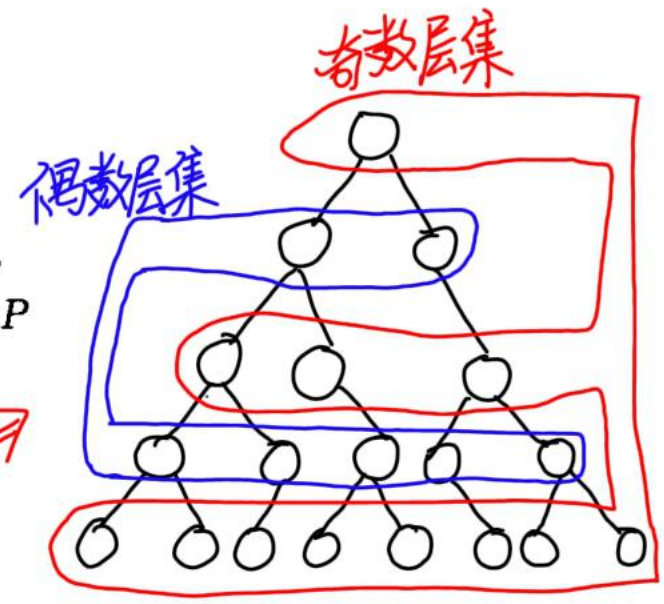
A. $(P\wedge Q)\to R$　　B. $(P\vee Q)\to R$　　C. $(R\leftrightarrow Q)\to P$

D. $P\to(Q\to R)$　　E. $\sim(P\wedge Q)\to R$

4. 树是（　　）。

A. 欧拉图　　B. 哈密顿图　　C. 二部图

D. 平面图　　E. 连通图



5. 在一个环 $(R, +, \cdot)$ 中，以下命题不一定成立的有（　　）。

A. $a\cdot 0=0$

B. $a\cdot(-b)=-(a\cdot b)$

C. $-a\cdot(-b)=a\cdot b$

D. $a\cdot b=0$，则 $a=0$ 或 $b=0$

E. $a\cdot b=a\cdot c$，则 $b=c$

三、填空题（本大题共 5 小题，每题 2 分，共 10 分）

1. 设 $A=\{2, a, \{3\}, 4\}$，$B=\{\{a\}, 3, 4, 1\}$，请在下列每对集合中填入适当的符号：

(1) $\{a\}$ _____ B，(2) $\{a, 4, \{3\}\}$ _____ A。

2. 设 $A=\{0, 1\}$，$\mathbf{N}$ 为自然数集，

$$f(x)=\begin{cases}0 & x\text{ 是奇数}\\ 1 & x\text{ 是偶数}\end{cases}$$

若 $f: A\to A$，则 f 是(1)_____射的，

若 $f: \mathbf{N}\to A$，则是(2)_____射的。

3. 设图 $G=\langle V, E\rangle$ 中有 7 个结点，各结点的度数分别为 2，4，4，6，5，5，2，则 G 中有(1)_____条边，根据(2)_____。

4. 两个重言式的析取是（1）_____，一个重言式和一个矛盾式的合取是(2)_____。

5. 设个体域为自然数集，命题“不存在最大自然数”符号化为(1)_____。

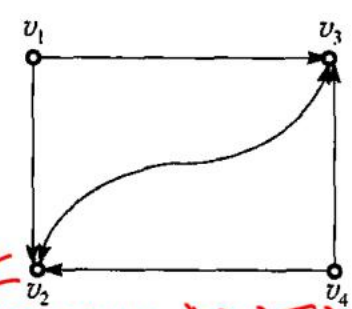
四、演算题（本大题共 5 小题，每题 7 分，共 35 分）

1. 写出 $(P\wedge\sim R)\vee(S\wedge P)$ 的主析取范式。

2. 把下面的命题符号化成逻辑公式：

每个旅客要么坐硬座要么坐软座，每个旅客当且仅当富裕时坐软座，并非每个旅客都富裕。因此，有些旅客坐硬座。

3. 利用矩阵方法求如图所示的所有强分图（写出运算过程）。



4. 将置换 $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\5&1&6&3&2&4\end{pmatrix}$ 表示成循环之积，并求其逆置换。

5. 无向图 G 有 21 条边，12 个 3 度顶点，其余顶点的度数均为 2，求 G 的阶数 n（写出求解过程）。

五、证明题（本大题共 3 小题，每题 10 分，共 30 分）

1. 证明：$\langle\{a+b\sqrt{2}\mid a, b\in I\}, +, \times\rangle$ 为环（$+$，$\times$ 为普通加法和乘法）。

2. 证明：简单连通无向图 G 的任何一条边都是 G 的某一棵生成树的边。

3. 证明：$P\to(Q\to S)$ 是 $\{P\to(Q\to R), R\to(Q\to S)\}$ 的逻辑结果。

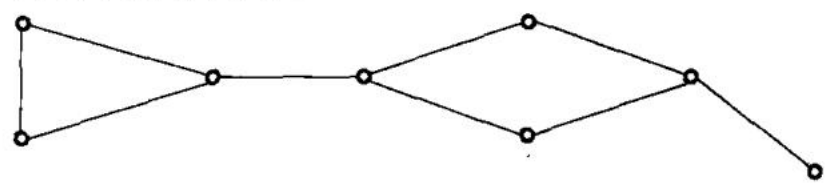
离散数学模拟试题Ⅳ

一、单项选择题（本大题共15小题，每题1分，共15分）在每小题列出的四个备选项中只有一个是符合题目要求的，请将其代码填写在题后的括号内。错选、多选或未选均无分。

1. 结点数为奇数且所有结点的度数也为奇数的连通图必定是（　　）。

A. 欧拉图　　B. 哈密顿图　　C. 非平面图　　D. 不存在的

2. 平面图（如下）的三个面的次数分别是（　　）。



A. 11，3，4　　B. 11，3，5　　C. 12，3，6　　D. 10，4，3

3. 下列式子中（　　）是永真的。

A. $(P \vee Q) \rightarrow (P \wedge Q)$　　B. $(P \rightarrow Q) \wedge (P \vee Q)$

C. $(P \rightarrow Q) \rightarrow (P \leftrightarrow Q)$　　D. $(P \leftrightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow Q)$

4. 设 R 是 A 上的二元关系，且 $R \circ R = R$，则可以肯定 R 应是（　　）。

A. 自反关系　　B. 传递关系　　C. 反对称关系　　D. 等价关系

5. 永真命题公式（　　）。

A. 只存在主析取范式　　B. 只存在主合取范式

C. 既存在主析取范式也存在主合取范式　　D. 都不对

6. 设集合 $A=\{1, 2, 3, 4\}$，下列 A 上的关系构成 A 到 A 的映射的是（　　）。

A. $f_1=\{(2, 1), (2, 4), (3, 4), (4, 1)\}$

B. $f_2=\{(4, 4), (3, 1), (1, 2), (4, 2)\}$

C. $f_3=\{(1, 1), (2, 1), (1, 2), (3, 4)\}$

D. $f_4=\{(1, 4), (2, 1), (3, 4), (4, 1)\}$

7. 设 R 是 A 上的二元关系，，且 $R \circ R \cup R = R$，则（　　）。

A. $r(R)=R$　　B. $S(R)=R$　　C. $t(R)=R$　　D. $R=I_A$

8. 下面关于集合基数正确的说法是（　　）。

A. 一个集合不可能和它的真子集等势　　B. 实数集合的基数最大

C. 没有最大的基数　　D. 素数集合与有理数集合等势

9. 在自然数集 **N** 上，下列哪种运算是可结合的？（　　）

A. $a * b = a - b$　　B. $a * b = \max\{a, b\}$

C. $a * b = a + 2b$　　D. $a * b = a \cdot b \pmod 3$

10. 下列代数系统〈S，＊〉中，哪个是群？（　　）

A. S=｛0，1，3，5｝，＊是模7加法　　B. S=**Q**（有理数集合），＊是一般乘法

C. S=**Z**（整数集合），＊是一般减法　　D. S=｛1，3，4，5，9｝，＊是模11乘法

11. 下面哪个集合关于指定的运算构成环？（　　）

A. $\{a+b\sqrt[3]{2} \mid a, b \in \mathbf{Z}\}$，关于数的加法和乘法

B. $\{n$ 阶实数矩阵$\}$，关于矩阵的加法和乘法

C. $\{a+b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbf{Z}\}$，关于数的加法和乘法

D. $\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbf{Z}\right\}$，关于矩阵的加法和乘法

12. 在代数系统中，整环和域的关系为（　　）。

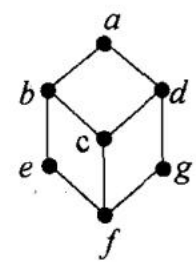
A. 域一定是整环　　B. 域不一定是整环

C. 整环一定是域　　D. 域一定不是整环

13. **N** 是自然数集，≤是小于等于关系，则 (**N**, ≤) 是（　　）。

A. 有界格　　B. 有补格　　C. 分配格　　D. 有补分配格

14. 右图给出的 Hasse 图表示的格中哪个元素无补元？（　　）



A. a　　B. c　　C. e　　D. f

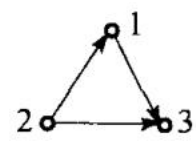
15. 给定下列序列，可构成无向简单图的结点度数序列的是（　　）。

A. (1, 1, 2, 2, 3)　　B. (1, 3, 4, 4, 5)

C. (0, 1, 3, 3, 3)　　D. (1, 1, 2, 2, 2)

二、多项选择题（本大题共 5 小题，每题 2 分，共 10 分）在每小题列出的五个备选项中有二至五个是符合题目要求的，请将其代码填写在题后的括号内。错选、多选、少选或未选均无分。

1. 设 $A=\{1, 2, 3\}$，则右图所示 A 上的关系具有（　　）。



A. 自反性　　B. 反自反性　　C. 对称性　　D. 反对称性　　E. 传递性

2. 设 $A=\{a\}$，$B=\{a, \{a\}\}$，则（　　）。

A. $A\in B$　　B. $A\subseteq B$　　C. $\{A\}\in B$　　D. $\{A\}\subseteq B$　　E. $\{A\}\subseteq\{B\}$

3. 下列命题公式中，（　　）在解释 $\{\sim P, Q, \sim R\}$ 下为真。

A. $(P\wedge Q)\rightarrow R$　　B. $(P\vee Q)\rightarrow R$　　C. $(R\leftrightarrow Q)\rightarrow P$

D. $P\rightarrow(Q\rightarrow R)$　　E. $\sim(P\wedge Q)\rightarrow R$

4. 树是（　　）。

A. 欧拉图　　B. 哈密顿图　　C. 二部图　　D. 平面图　　E. 连通图

5. 在一个环 $(R, +, \cdot)$ 中，以下命题不一定成立的有（　　）。

A. $a\cdot 0=0$　　B. $a\cdot(-b)=-(a\cdot b)$　　C. $-a\cdot(-b)=a\cdot b$

D. $a\cdot b=0$，则 $a=0$ 或 $b=0$　　E. $a\cdot b=a\cdot c$，则 $b=c$

三、填空题（本大题共 5 小题，每空 1 分，共 10 分）

1. 设 S 为非空有限集，代数系统 $\langle 2^S, \cup\rangle$ 中幺元为(1)_____，零元为(2)_____。

2. 设 P，Q 为两个命题，其 De Morgan 律可表示为(1)_____。

3. 当 $|G|=8$ 时，群 $\langle G, *\rangle$ 只能有(1)_____ 阶非平凡子群，不能有(2)_____ 阶子群，平凡子群为(3)_____。

4. 设 $A=\{x\mid x=2^n, n\in\mathbf{N}\}$，定义 A 上的二元运算为普通乘法、除法和加法，则代数系统 $\langle A, *\rangle$ 中运算 $*$ 关于(1)_____ 运算具有封闭性。

5. 设集合 $S=\{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \zeta\}$，$S$ 上的运算 $*$ 定义为则代数系统 $\langle S, *\rangle$ 中幺元是(1)_____，β 左逆元是(2)_____，无左逆元的元素是(3)_____。

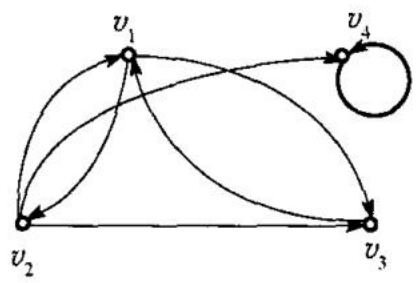
*	α	β	γ	δ	ζ
α	α	β	γ	δ	ζ
β	β	δ	α	γ	δ
γ	γ	α	β	α	β
δ	δ	α	γ	δ	γ
ζ	ζ	δ	α	γ	ζ

四、演算题（本大题共 5 小题，每题 7 分，共 35 分）

1. 用等值演算法，求 $P \vee (Q \wedge R)$ 的主析取范式。
2. 设 $A=\{1, 2, 3\}$，给定 A 上二元关系 $R=\{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle\}$。求 $r(R)$，$s(R)$ 和 $t(R)$。
3. 设树 G 中有 6 个结点度数为 2，5 个结点度数为 3，4 个结点度数为 6，其余结点度数均为 1。试求 G 中的总结点数目。
4. 群 $\langle S, * \rangle$ 的运算如下表所示。试求 $\langle S, * \rangle$ 的单位元、每个元素的逆元，如果存在生成元，请计算所有的生成元。

*	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	x_1	x_2	x_3	x_4
x_2	x_2	x_3	x_4	x_1
x_3	x_3	x_4	x_1	x_2
x_4	x_4	x_1	x_2	x_3

5. 下图为一个有向图，用邻接矩阵计算该图中长度为 3 的所有道路和回路总数。



计算A^3，(a_{ij})的值表示从i到j有几条路径

五、证明题（本大题共 3 小题，每题 10 分，共 30 分）

1. 证明：$(P \rightarrow (Q \rightarrow S)) \wedge (\neg R \vee P) \wedge Q \Rightarrow R \rightarrow S$。
2. 证明：整数集 I 上的模 m 同余关系 $R=\{\langle x, y\rangle \mid x \equiv y (\bmod m)\}$ 是等价关系。其中，$x \equiv y (\bmod m)$的含义是 $x-y$ 可以被 m 整除。
3. 证明：若有 n 个人，每个人都恰有 3 个朋友，则 n 必为偶数。

附　录

离散数学模拟试题

离散数学模拟试题 I

一、单项选择题（本大题共 15 小题，每题 1 分，共 15 分）在每小题列出的四个备选项中只有一个是符合题目要求的，请将其代码填写在题后的括号内。错选、多选或未选均无分。

A 1. 设 $A=\{x \mid x$ 是整数且 $x^2<16\}$，下面哪个命题为假（　　）。

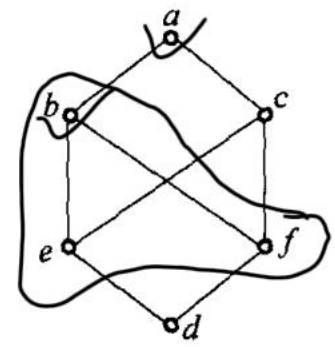
A. $\{0, 1, 2, 4\} \subseteq A$　　B. $\{-3, -2, -1\} \subseteq A$

C. $\varnothing \subseteq A$　　D. $\{x \mid x$ 是整数且 $|x|<4\} \subseteq A$

CA 2. 设 $A=\varnothing$，$B=\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$，则 $B-A$ 是（　　）。

A. $\{\{\varnothing\}\}$　　B. $\{\varnothing\}$　　C. $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$　　D. $\varnothing$

B 3. 右图描述的偏序集中，子集 $\{b, e, f\}$ 的上界为（　　）。



A. b，c　　B. a，b　　C. b　　D. a，b，c

C 4. 设 f 和 g 都是 X 上的双射函数，则 $(f \circ g)^{-1}$ 为（　　）。

A. $f^{-1} \circ g^{-1}$　　B. $(g \circ f)^{-1}$　　C. $g^{-1} \circ f^{-1}$　　D. $g \circ f^{-1}$

B 5. 下面集合（　　）关于减法运算是封闭的。

A. $\mathbf{N}$　　B. $\{2x \mid x \in I\}$

C. $\{2x+1 \mid x \in I\}$　　D. $\{x \mid x$ 是质数$\}$

D 6. 具有如下定义的代数系统 $\langle G, * \rangle$，（　　）不构成群。

A. $G=\{1, 10\}$，$*$ 是模 11 乘　　B. $G=\{1, 3, 4, 5, 9\}$，$*$ 是模 11 乘

C. $G=\mathbf{Q}$（有理数集），$*$ 是普通加法　　D. $G=\mathbf{Q}$（有理数集），$*$ 是普通乘法

B 7. 设 $G=\{2^m \times 3^n \mid m, n \in I\}$，$*$ 为普通乘法。则代数系统 $\langle G, * \rangle$ 的幺元为（　　）。

A. 不存在　　B. $e=2^0 \times 3^0$　　C. $e=2 \times 3$　　D. $e=2^{-1} \times 3^{-1}$

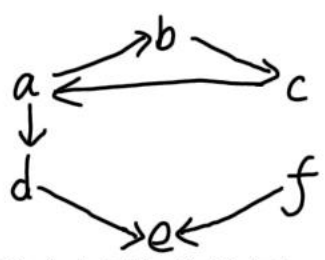
C 8. 下面集合（　　）关于整除关系构成格。

A. $\{2, 3, 6, 12, 24, 36\}$　　B. $\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12\}$

C. $\{1, 2, 3, 5, 6, 15, 30\}$　　D. $\{3, 6, 9, 12\}$

C 9. 设 $V=\{a, b, c, d, e, f\}$，$E=\{\langle a, b\rangle, \langle b, c\rangle, \langle c, a\rangle, \langle a, d\rangle, \langle d, e\rangle, \langle f, e\rangle\}$，则有向图 $G=\langle V, E\rangle$ 是（　　）。

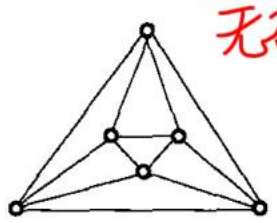
A. 强连通的　　B. 单向连通的　　C. 弱连通的　　D. 不连通的



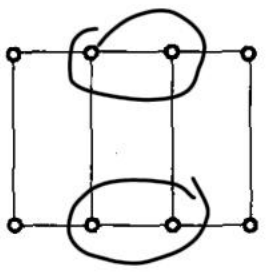
A 10. 下面哪个图是欧拉图（　　）。

无奇度结点、连通

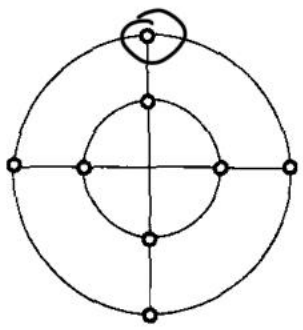
A.



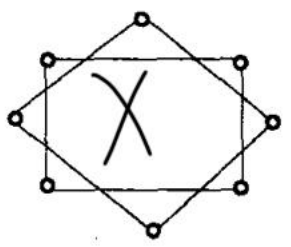
B.



C.



D.



C 11. 在任何图中必定有偶数个（　　）。

A. 度数为偶数的结点　　B. 入度为奇数的结点

C. 度数为奇数的结点　　D. 出度为奇数的结点

C A 12. 含有 3 个命题变元的具有不同真值的命题公式的个数为（　　）。

真值表有 2^3 行，对应 2^3 种情况 ⇒ 每种情况为 0/1 ⇒ 2^{2^3} 个

A. 2^3　　B. 3^2　　C. 2^{2^3}　　D. 2^{3^2}

A 13. 下列集合中哪个是最小联结词集（　　）。

A. $\{\neg, \rightarrow\}$　　B. $\{\neg, \leftrightarrow\}$

C. $\{\rightarrow, \leftrightarrow\}$　　D. $\{\neg, \wedge, \vee\}$

B 14. 下面哪个命题公式是重言式（　　）。

A. $(P\rightarrow Q)\wedge(Q\rightarrow R)$　　（永真式）　　B. $(P\wedge Q)\rightarrow P$ ✓

C. $(\neg P\vee Q)\wedge\neg(P\wedge\neg Q)$　　D. $\neg(P\vee Q)\wedge P$

A 15. 在谓词演算中，下列各式哪个是正确的（　　）。

$\exists\Rightarrow\forall\Rightarrow\exists\Rightarrow\forall$

A. $\exists x\exists yA(x, y)\Leftrightarrow\exists y\exists xA(x, y)$

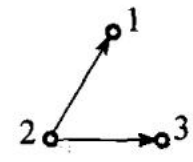
B. $\exists x\exists yA(x, y)\Leftrightarrow\forall y\forall xA(x, y)$

C. $\exists x\forall yA(x, y)\Leftrightarrow\forall y\exists xA(x, y)$

D. $A(a)\Leftrightarrow\forall xA(x)$

二、多项选择题（本大题共 5 小题，每题 2 分，共 10 分）。在每小题列出的五个备选项中有二至五个是符合题目要求的，请将其代码填写在题后的括号内。错选、多选、少选或未选均无分。

BDE 1. 设 $A=\{1, 2, 3\}$，则右图所示 A 上的关系具有（　　）。



A. 自反性　　B. 反自反性　　C. 对称性

D. 反对称性　　E. 传递性

ACD 2. 下列语句是命题的有（　　）。

A. 明年中秋节的晚上是晴天　　B. $x+y>0$

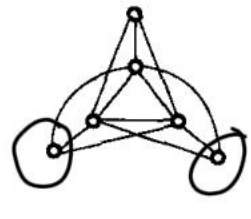
C. $xy>0$ 当且仅当 x 和 y 都大于 0　　D. 我正在说谎　悖论

ABCDE 3. A、B 为二合式公式，且 $A\Leftrightarrow B$，则（　　）。

A. $A\rightarrow B$ 为重言式　　B. $A^*\Rightarrow B^*$　　C. $A\Rightarrow B$

D. $A^*\Leftrightarrow B^*$　　E. $A\leftrightarrow B$ 为重言式

ABCE 4. 右图一定不是（　　）。



A. 平面图　　$n-m+f=1\neq 2$　　B. 二部图　　C. 欧拉图

D. 哈密顿图　　E. 树

5. 设 R 和 S 是集合 A 上的任意关系，下列命题不成立（　　）。

A. 若 R 和 S 是自反的，则 $R\circ S$ 也是自反的。

B. 若 R 和 S 是反自反的，则 $R\circ S$ 也是反自反的。

C. 若 R 和 S 是对称的，则 $R\circ S$ 也是对称的。

D. 若 R 和 S 是传递的，则 $R\circ S$ 也是传递的。

三、填空题（本大题共 5 小题，每题 2 分，共 10 分）

1. P：你努力，Q：你失败。“除非你努力，否则你将失败”的翻译为(1)_____；“虽然你努力了，但还是失败了”的翻译为(2)_____。

2. 设 $A=\{2,3,4,5,6\}$ 上的二元关系 $R=\{\langle x,y\rangle \mid x<y \vee x$ 是质数$\}$，则 $R=$(1)_____（枚举法）。R 的关系矩阵 $\boldsymbol{M}_R=$(2)_____

*	a	b	c
a	a	b	c
b	b	b	c
c	c	c	b

3. 设代数系统 $\langle A,*\rangle$，其中 $A=\{a,b,c\}$，则幺元是(1)_____；是否有幂等性(2)_____。

4. 设 $A=\{1,2,3\}$，则 A 上既不是对称的又不是反对称的关系 $R=$(1)_____；A 上既是对称的又是反对称的关系 $R=$(2)_____

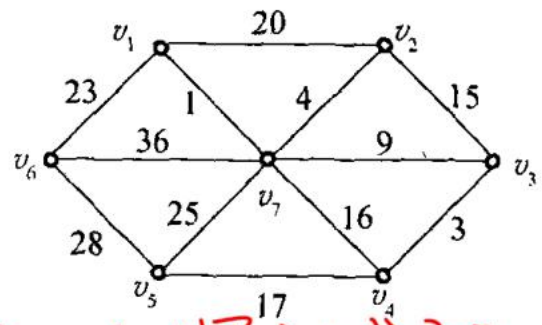
5. n 个结点的无向完全图 K_n 的边数为(1)_____，欧拉图的充要条件是(2)_____

四、演算题（本大题共 5 小题，每题 7 分，共 35 分）

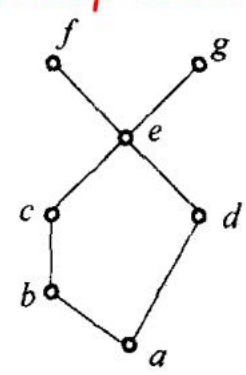
1. 设 $A=\{1,2\}$，A 上所有函数的集合记为 A^A，$\circ$ 是函数的复合运算，试给出 A^A 上运算 $\circ$ 的运算表，并指出 A^A 中是否有幺元，哪些元素有逆元。

2. 设 $E(x_1,x_2,x_3)=(x_1\wedge\overline{x}_2)\vee(x_2\wedge\overline{x}_3)\vee(\overline{x}_1\wedge x_3)$ 是布尔代数 $\langle\{0,1\},\vee,\wedge,^-\rangle$ 上的一个布尔表达式，试写出其主析取范式和主合取范式。

3. 如右图所示的赋权图表示某七个城市 v_1，v_2，…，v_7 及预先算出它们之间的一些直接通信线路造价（单位：万元）。试给出一个设计方案，使得各城市之间既能够通信又使总造价最小。



4. 已知有如右图的偏序关系，求出其子集 $A=\{b,c,d,e\}$ 的极大元、极小元、最大元、最小元、最小上界和最大下界。



5. 设 $A=\{a,b,c\}$，A 上的关系 $\rho=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,b\rangle\}$，求 $r(\rho)$，$s(\rho)$ 和 $t(\rho)$。

五、证明题（本大题共 3 小题，每题 10 分，共 30 分）

1. 证明：$(P\rightarrow(Q\rightarrow S))\wedge(\neg R\vee P)\wedge Q\Rightarrow R\rightarrow S$。

2. 如果集合 A 上的关系 R 和 S 是自反的、对称的和传递的，证明：$R\cap S$ 是 A 上的等价关系。

3. 证明：若无向图 G 中只有两个奇数度结点，则这两个结点一定连通。

离散数学模拟试题 Ⅱ

一、单项选择题（本大题共 15 小题，每题 1 分，共 15 分）在每小题列出的四个备选项中只有一个是符合题目要求的，请将其代码填写在题后的括号内。错选、多选或未选均无分。

1. 设 $S=\{\varnothing,\{1\},\{1,2\}\}$ 则 2^S 有（　　）个元素。

A. 3　　B. 6　　C. 7　　D. 8

Key:

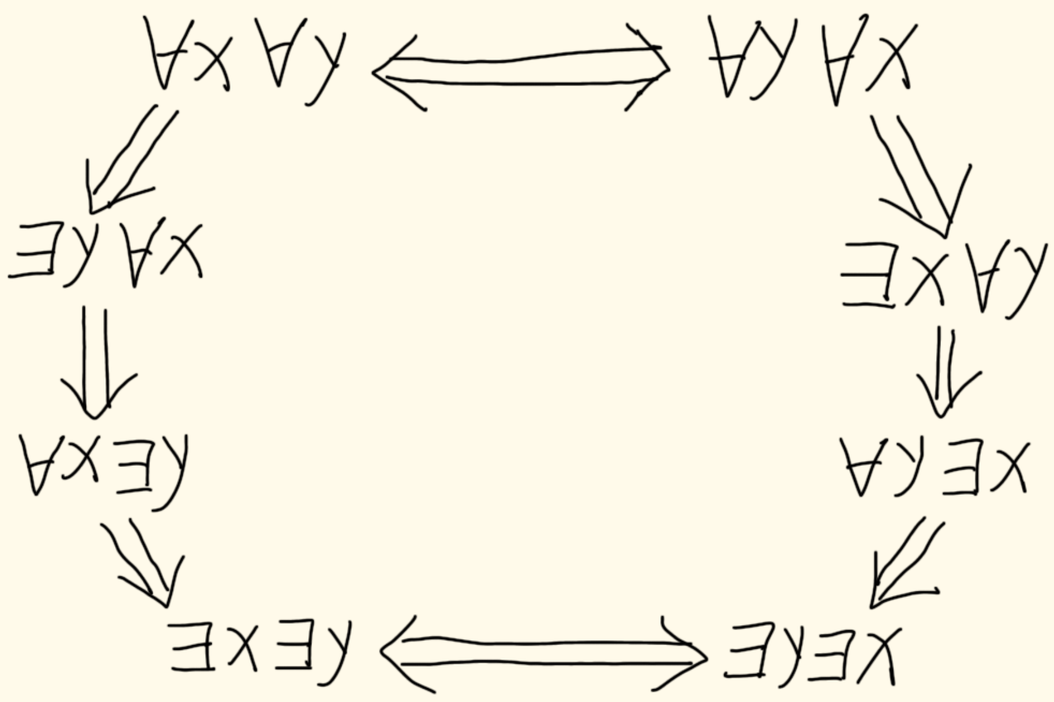
谓词表达式中，通常

$\forall$ 与 $\rightarrow$　　$\exists$ 与 $\wedge$

定理 2.10 设 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 是以 D 为论域的谓词公式，则下述蕴涵式成立：

⑤ $(\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x) \Rightarrow (\forall x)[P(x) \vee Q(x)]$

⑥ $(\exists x)[P(x) \wedge Q(x)] \Rightarrow (\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x)$



若 A, B 不存在子集关系，则 $2^A \cup 2^B \subset 2^{A \cup B}$

R是自反的 $\Leftrightarrow I_A \subseteq R$

R是反自反的 $\Leftrightarrow R \cap I_A = \varnothing$

R是对称的 $\Leftrightarrow R = R^{-1}$

R是反对称的 $\Leftrightarrow R \cap R^{-1} \subseteq I_A$

R是传递的 $\Leftrightarrow R^2 \subseteq R$

$R \cap S$、R^{-1} 保持自反、对称、传递

$R \cup S$ 不保持传递

$R - S$ 不保持自反、传递

$R \circ S$ 不保持对称、传递

定理 5.2 非空集合 A 上的每个等价关系都能决定 A 的一个分划；而 A 的每个分划都能导出 A 上的一个二元等价关系。

$\forall a, b \in A, [a]=[b]$ 或 $[a] \wedge [b] = \varnothing$

$\bigcup_a [a] = A$

分划 $A = \{S_1, S_2, S_3, \dots\}$

$R = S_1 \times S_1 \cup S_2 \times S_2 \cup \cdots \cup S_i \times S_i \cup \cdots\cdots$

（全关系是等价的）

全序集 $\xrightarrow{\text{有限}}$ 良序集

4. 试确定在 4 个元素的集合上可以定义的等价关系数目。

一个分划 $\Longleftrightarrow$（一一对应）一种等价关系

区别：二元关系数目 $= |A| \times |A|$

A 上的 n 阶置换共有 $n!$ 种

无限集可以与它的真子集等势。

定义 6.10 凡是与自然数集 N 等势的集合称为**可数集**。

$$K(G)=\begin{cases}\text{最小的基本点割集的基数}, & G\neq K_n\\ n-1, & G=K_n\end{cases}$$

$$\lambda(G)=\begin{cases}\text{最小的边割集的基数}, & \text{others}\\ 0, & G=K_1\\ n-1, & G=K_n\end{cases}$$

定义 10.16 设 $G=(V,E)$ 是一个简单有向图。如果对 G 中任何一对结点，至少从其中一结点到另一结点是可达的，则称 G 是**单向连通图**；如果任何两个结点之间都是相互可达的，则称 G 是**强连通图**；如果 G 的基图是连通的，则称 G 是**弱连通图**。

定理 12.4 设 G 是一个面数为 f 的 (n,m) 连通平面图，则

$$n-m+f=2$$

定理 12.5 设 G 是一个阶数大于 2 的 (n,m) 连通简单平面图，则

$$m\leqslant 3n-6$$

4。设Mn是全体n阶满秩阵构成的集合，定义运算“•”为矩阵的乘法，那么〈Mn，•〉是n 阶满秩矩阵乘群。运算封闭、可结合、有幺元（n阶单位矩阵）、每个满秩阵的逆就是其逆矩阵。

5。当 k是素数时，〈Z_k –{[0]}，⊗〉是模 k乘群：封闭、可结合、有幺元 [1]，元[a] 的逆元是 [i] 。

群、分配格中，消去律成立

定理 15.8 设〈G，$\cdot$〉是群，S是G的非空子集。〈S，$\cdot$〉是〈G，$\cdot$〉的子群当且仅当对任何a，$b\in S$，$a\cdot b^{-1}\in S$。(子群的证明方法)

定理 15.9 群〈G，$\cdot$〉为交换群的充要条件是：对任意a，$b\in G$，$(a\cdot b)^2=a^2\cdot b^2$。

定理 15.14 设H是群G的正规子群，则H是正规子群，当且仅当对任何$a\in G$，$aHa^{-1}\subseteq H$。(正规子群的证明方法)

证明
- 子群 $S\subseteq G$，$\forall a,b\in S$，$a\cdot b^{-1}\in S$
- 交换群 $(a\cdot b)^2=a^2\cdot b^2$
- 正规子群 $aHa^{-1}\subseteq H$

定理 15.13 拉格朗日定理 n阶群〈G，$\cdot$〉的任何子群〈H，$\cdot$〉的阶必是n的因子。

推论 15.13.1 n元群G中任何元素的周期必是n的因子。

定义 15.9 设〈S，$\cdot$〉和〈T，$\circ$〉是两个代数系数，其中“$\cdot$”和“$\circ$”分别是S和T的二元运算。如果存在映射f：$S\to T$使得对任意a_1，$a_2\in S$

$$f(a_1\cdot a_2)=f(a_1)\circ f(a_2)$$

则称f是S到T的**同态映射**，或者S和T（在影射f下）**同态**，记为$S\sim T$；称$f(S)\subseteq T$为S的**同态像**。

23 找出同余类加群〈$\mathbf{Z}_9$，$\oplus$〉的全部三阶子群及相应的陪集。

〈Z_9，$\oplus$〉$=\{[0],[1],[2],[3],[4],[5],[6],[7],[8]\}$

全部3阶子群：$H=\{[0],[1],[8]\}$ ✗ ([1]+[1]=[2])　$\{[0],[3],[6]\}$ ✓

$\{[0],[2],[7]\}$ ✗ ([2]+[2]=[4])　$\{[0],[4],[5]\}$ ✗ ([4]+[4]=[8] 不封闭!!!)

$\frac{9\text{阶}}{3\text{阶}}=3$个：$[0]H=H=\{[0],[3],[6]\}$

$[1]H=\{[1],[4],[7]\}$

$[2]H=\{[2],[5],[8]\}$

定理 16.5 有限整环〈R，$+$，$*$〉必是域。

〈Z_n，$\oplus$，$\otimes$〉(n为素数)$\Rightarrow$有限整环

〈Z，$+$，$\times$〉是整环，不是域(未必存在逆元)

环$\langle R,+,*\rangle$ = $\langle R,+\rangle$交换群
$\langle R,*\rangle$半群
+,*可分配

↓

整环$\langle R,+,*\rangle$ = $\langle R,+,*\rangle$环
*可交换
$\langle R,*\rangle$有幺元
无零因子

↓

域$\langle R,+,*\rangle$ = $\langle R,+,*\rangle$整环
R-{0}上"*"均有逆元

定理 17.6 设 $\langle L, \vee, \wedge\rangle$ 为格，$\leqslant$是对应的偏序，$a, b, c, d \in L$，则

① $a \vee (b \wedge c) \leqslant (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

② $(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \leqslant a \wedge (b \vee c)$

(准分配关系)

$(\cdots \vee \cdots \leqslant \cdots \wedge \cdots)$

偏序格：任意{a,b}在L均有最小上界、最大下界
代数格：∧,∨满足交换律、结合律、吸收律
对偶格：偏序关系互逆
分配格：∧,∨互相可分配
有界格：存在最大、最小元
有补格：$\forall a \in L$，均存在$\bar{a} \in L$且$a \vee \bar{a}$=最大元
布尔代数：有补分配格　　$a \wedge \bar{a}$=最小元

非分配格：五点格
非有补格：因子格、全序格
布尔代数：$\langle 2^S, \cup, \cap\rangle$